

**Математическое моделирование трансформаций амплитудно-фазовых структур электромагнитных полей в неоднородных средах с частотной дисперсией, соответствующих различным основным волновым катастрофам**

А.С. Крюковский, Е.В. Михалёва, Д.В. Растягаев

<sup>1</sup> АНО ВО «Российский новый университет»  
105005, г. Москва, ул. Радио, 22.  
E-mail: kryukovsky56@yandex.ru

*Рассмотрена трансформация амплитудной и фазовой структуры волнового поля при переходе от каустической особенности  $A_3$  («клюв») к особенности  $A_5$  («бабочка»). Представлены лучевые и каустические структуры, а также амплитуды и фазы в вертикальных сечениях. Показано, что при переходе от особенности  $A_3$  к особенности  $A_5$  максимальные значения амплитуд существенно возрастают, в то время как отстройка частоты порядка 1 кГц от оптимально значения может существенно уменьшить амплитуду.*

*Ключевые слова: моделирование, волны, катастрофы, лучи, каустики, амплитуда, фаза*

**Mathematical modeling of transformations of amplitude-phase structures of electromagnetic fields in inhomogeneous media with frequency dispersion, corresponding to various main wave catastrophes**

A.S. Kryukovsky, E.V. Mikhaleva, D.V. Rastyagaev

<sup>1</sup> Russian New University.

*The transformation of the amplitude and phase structure of the wave field during the transition from caustic singularity  $A_3$  ("cusp") to singularity  $A_5$  ("butterfly") is considered. Ray and caustic structures, as well as amplitudes and phases in vertical cross-sections, are presented. It is shown that during the transition from singularity  $A_3$  to singularity  $A_5$ , the maximum amplitude values increase significantly, while a frequency detuning of approximately 1 kHz from the optimal value can significantly reduce the amplitude.*

*Keywords: modeling, waves, catastrophes, rays, caustics, amplitude, phase*

**Введение**

Изучение особенностей распространения, фокусировки и дифракции радиоволн асимптотическими методами является актуальной задачей радиофизики [1]. В теории распространения радиоволн в ионосфере Земли особую роль играют лучевые методы, в частности метод геометрической оптики (ГО), поскольку обычно длина электромагнитной волны много меньше характерных размеров среды распространения – ионосферной плазмы. Применение расширенной бихарактеристической системы Лукина позволяет не только определять координаты лучей и волновые вектора, но также одновременно вычислять расходимость лучевого потока, а следовательно, и амплитуду поля [2-4]. В многолучевых областях решения могут быть найдены на основе суперпозиции. Однако в неоднородной среде возникают огибающие лучевых семейств – каустики и их особенности [1,5]. На каустических поверхностях якобиан расходимости обращается в ноль, а амплитуда поля в лучевом приближении – в бесконечность. В действительности амплитуда поля остаётся конечной, но существенно возрастает. Возникает эффект фокусировки излучения, причём порядок фокусировки зависит от типа особенности – волновой катастрофы.

Основой для классификации каустических фокусировок является теория особенностей дифференцируемых отображений (теория катастроф) [6-8]. Согласно работам [7, 9, 10], если задача о распространении волн двумерная, то устойчивыми являются две особенности: гладкая каустика (катастрофа  $A_2$ ) и каустическое острие (катастрофа  $A_3$  – «клюв» или «cusp»). В обычном трёхмерном конфигурационном пространстве, в котором гладкая каустика образует поверхности, а каустическое острие – линии, устойчивыми также являются: «ласточкин хвост» ( $A_4$ ), «эллиптическая омбилика» ( $D_4^-$ ) и «гиперболическая омбилика» (катастрофа  $D_4^+$ ), а в четырёхмерном пространстве-времени добавляются также катастрофы:  $D_5$  – «параболическая омбилика» и  $A_5$  – «бабочка».

Однако как показано в [11-14], при наличии дополнительных параметров даже в двумерной задаче возникают сечения каустических особенностей более высоких порядков: «ласточкин хвост» ( $A_4$ ), «бабочка» ( $A_5$ ), «вигвам» ( $A_6$ ), «звезда» ( $A_7$ ), «гиперболическая омбилика» ( $D_4^+$ ), что приводит к необходимости привлечения для описания амплитудной и фазовой структуры волновых полей специальных функций катастроф этих порядков. В [15-17] показано, что при определённых значениях параметров задачи, таких как частота, полутолщина слоя и др. возникают не только особые (характерные) сечения каустик, но и сами центры фокусировок.

В настоящей работе на примере неоднородного плазменного слоя с частотной дисперсией рассмотрено математическое моделирование трансформаций амплитудно-фазовых структур электромагнитных полей, соответствующих основным волновым катастрофам.

### Постановка задачи

Рассмотрим трансформацию амплитудно-фазовой структуры волнового поля на примере распространения радиоволн в параболическом плазменном слое с электронной концентрацией [12]:

$$N_e = \begin{cases} N_0(1 - \Theta^2); & z_h \leq z \leq z_h + 2z_0 \\ 0; & z < z_h, \quad z > z_h + 2z_0 \end{cases}, \quad \Theta = \frac{z - z_h - z_0}{z_0}. \quad (1)$$

В формуле (1)  $z_h$  – нижняя граница слоя, а  $z_0$  – полутолщина слоя ( $z_0=200$  км). Электронная концентрация в максимуме слоя равна:

$$N_0 = \frac{m_e \omega_p^2}{4\pi e^2}, \quad (2)$$

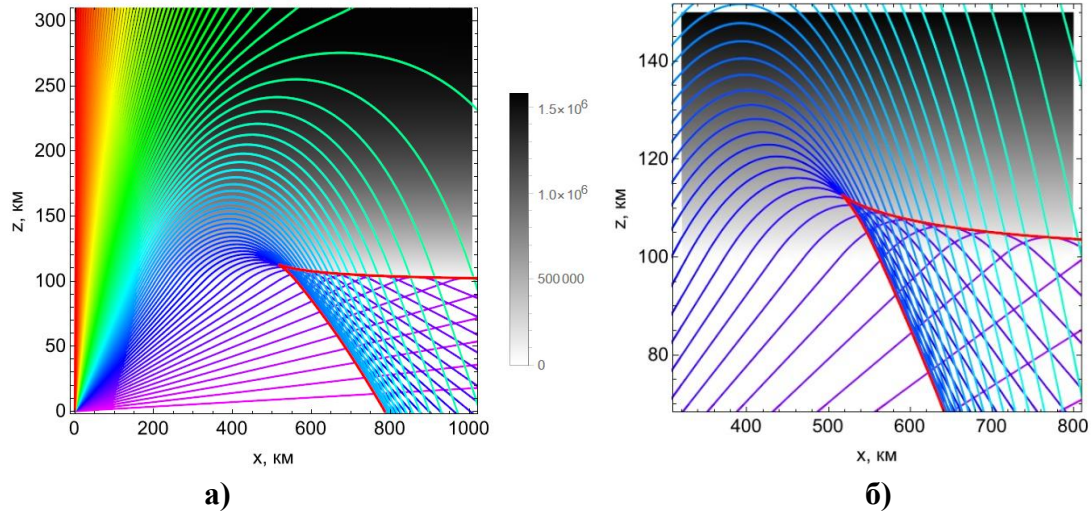
где  $m_e$  – масса электрона,  $e$  – заряд электрона, а  $\omega_p = 7.1 \times 10^7 \text{ с}^{-1}$  – круговая плазменная частота. Предполагается, что источник излучения находится в начале координат ( $x = 0$ ,  $z = 0$ ). Очевидно, что при такой постановке задачи существуют два параметра, изменение которых приводит к трансформации лучевой, каустической и, как следствие, амплитудной и фазовой структуры электромагнитных полей. Это высота нижней границы слоя  $z_h$  и отношение плазменной частоты к рабочей – параметр  $a$ :

$$a = \frac{\omega_p}{\omega}. \quad (3)$$

Рассмотрим, как влияют эти параметры на структуру амплитуды и фазы волновых полей в окрестности каустических особенностей типа катастроф.

### Волновое поле в окрестности каустического острия

Сначала рассмотрим классический случай, когда часть лучей проходит ионосферный слой, а часть от него отражается и возникает особенность типа каустическое остриё (катастрофа  $A_3$ ). На рис. 1 показана лучевая и каустическая структура при  $a=0.7$  и  $z_h=100$  км.



**Рис.1. Лучевая и каустическая структура при  $a=0.7$ , а) – полная структура, б) – фрагмент.**

На рисунке цветными линиями показаны геометрикооптические (ГО) лучи [2,4]. Каждый цвет соответствует определённому углу  $\alpha$  выхода луча. Красной линией в правой части рисунка показана каустическая огибающая – каустическое остриё. Хорошо видно, что внутри острия пересекаются три луча в одной точке, а вне его – однолучевая область (рис. 1 б). В окрестности нижней каустики густота лучей выше, чем в окрестности верхней ветви каустики. Вся каустическая структура лежит ниже максимума ионосферного слоя. Фоном рисунка является электронная концентрация. На легенде числами показаны значения электронной концентрации в  $\text{см}^{-3}$ .

Поле в окрестности каустического острия может быть выражена через функцию Пирси и её производные [18]:

$$u(x, z) = e^{i\theta} \left( l_1 I^{A_3}(\lambda_1, \lambda_2) + l_2 \frac{\partial I^{A_3}}{\partial \lambda_1} + l_3 \frac{\partial I^{A_3}}{\partial \lambda_2} \right), \quad (4)$$

где  $\theta$  – фаза бегущей волны,  $l_1, l_2, l_3$  – коэффициенты асимптотического разложения, а  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  – аргументы функции Пирси [19]:

$$I^{A_3}(\lambda_1, \lambda_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[ i(\xi^4 + \lambda_2 \xi^2 + \lambda_1 \xi) \right] d\xi \quad (5)$$

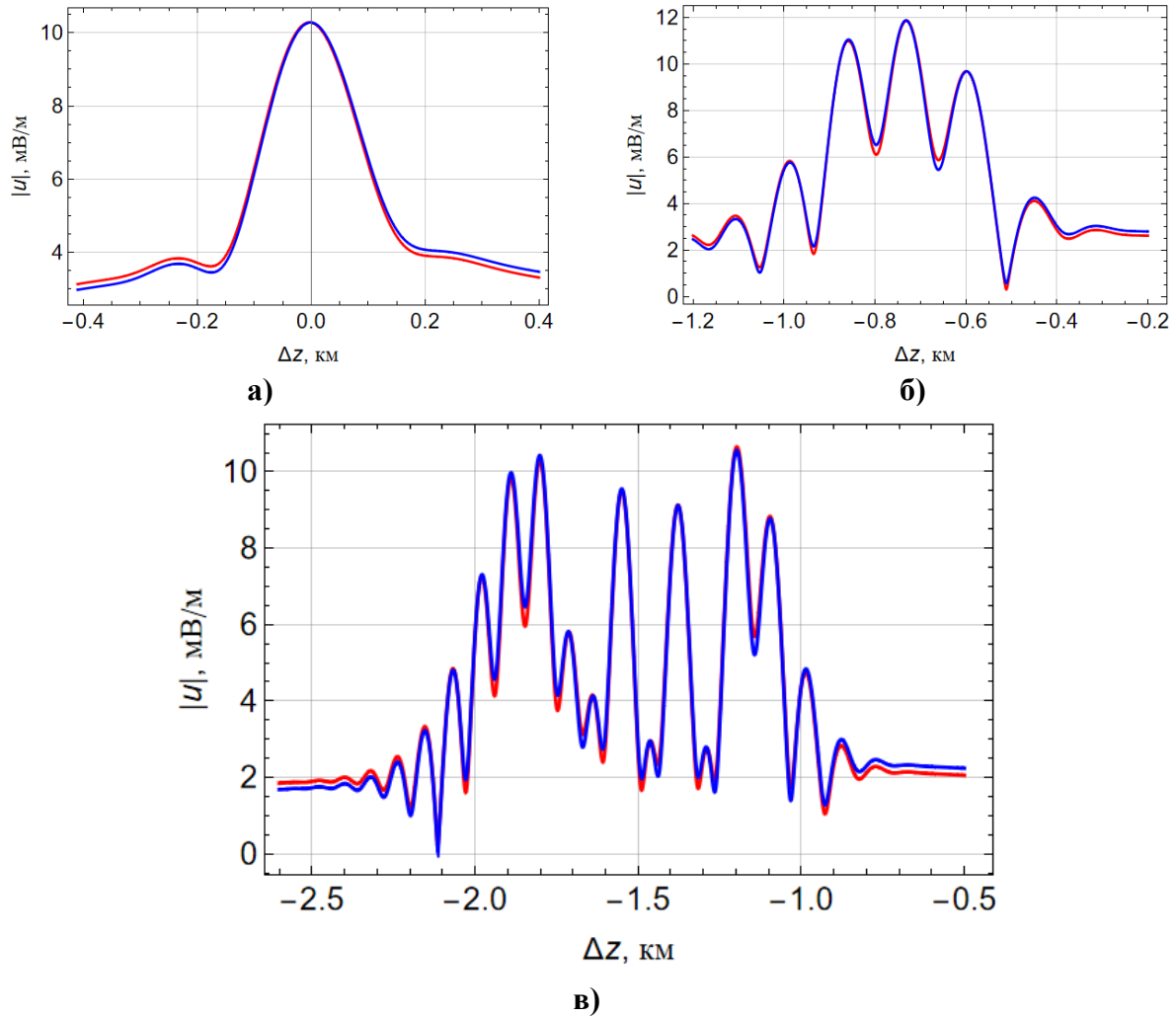
Используя методику, описанную в [15-17], найдены координаты положения центра каустического острия:  $x_o \approx 515.680$  км,  $z_o \approx 112.778$  км. Угол выхода луча с осью  $x$ , проходящей через центр каустического острия, равен:  $\alpha_o \approx 16.466^\circ$ . В этой точке рассчитаны производные эйконала по лучевому параметру, необходимые для определения аргументов функции Пирси в виде:

$$\lambda_1 \approx \gamma_{1x} \Delta x + \gamma_{1z} \Delta z, \quad \lambda_2 \approx \gamma_{2x} \Delta x + \gamma_{2z} \Delta z, \quad \Delta x = x - x_o, \quad \Delta z = z - z_o \quad (6)$$

и коэффициентов асимптотического разложения в особой точке  $l_1 \approx l_1^o, l_2 \approx l_2^o, l_3 \approx l_3^o$ . При вычислении аргументов функции Пирси и коэффициентов асимптотического разложения использован метод локальной асимптотики, развитый нами в [18, 20, 21].

При этом предполагалось, что источником излучения является магнитный диполь мощностью 1 кВт [22].

Зная матрицу  $\begin{bmatrix} \gamma_{1x} & \gamma_{1z} \\ \gamma_{2x} & \gamma_{2z} \end{bmatrix}$ , нетрудно рассчитать угол между положительными направлениями осей  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Он равен:  $150.178^\circ$ . На рис. 2 показаны графики амплитуд поля в вертикальных сечениях при различных значениях  $\Delta x$ .



**Рис. 2. Вертикальные сечения амплитуды поля, а) –  $\Delta x=0$  км, б) –  $\Delta x=5$  км, в) –  $\Delta x=10$  км.**

Синей линией показана амплитуда поля, рассчитанного по формуле (4), а красной линией – амплитуда поля, рассчитанная по той же формуле, но без учёта производных функции Пирси. Видно, что при данных параметрах задачи отличие минимальное и сводится в основном к значениям в минимумах амплитуды.

Первое сечение проходит через особую точку каустического острия, выше и ниже которой однолучевые области, и поэтому там нет осцилляций (рис. 2 а). Второе сечение проходит вблизи максимума амплитуды, который, как известно, смещён в трёхлучевую область по отношению к особой точке (рис. 2 б). В третьем сечении уже явно видна развитая трёхлучевая область (в центре), максимумы каустик и однолучевые зоны.

На рис. 3 и 4 показана фазовая структура волнового поля.

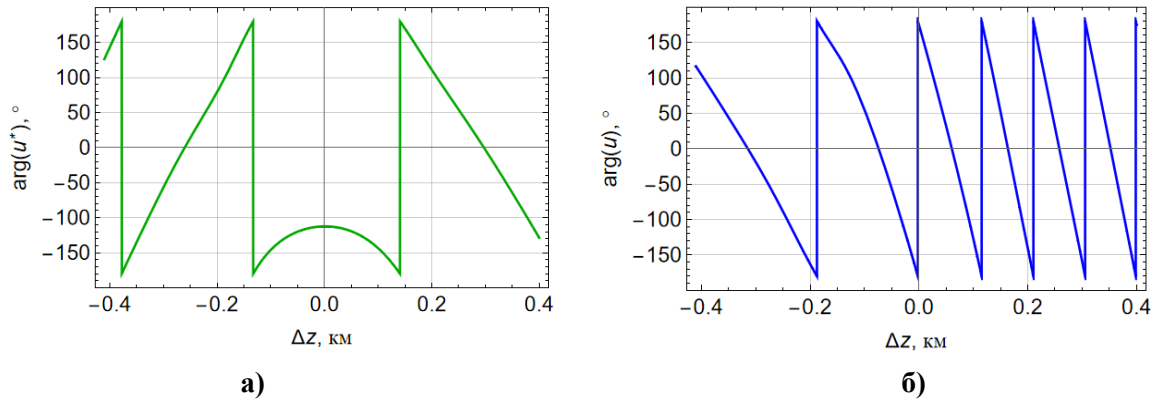


Рис. 3. Фазовая структура в сечении  $\Delta x=0$ , катастрофа  $A_3$ .

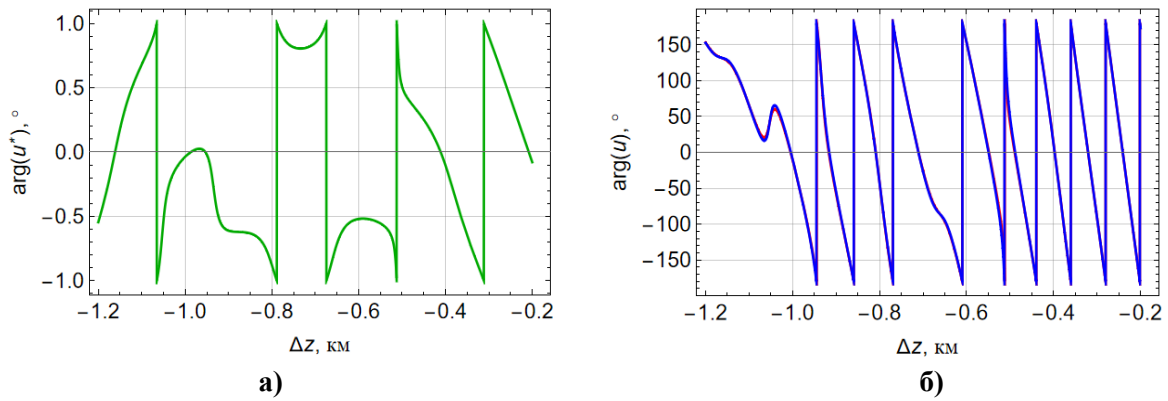


Рис. 4. Фазовая структура в сечении  $\Delta x=5$  км, катастрофа  $A_3$ .

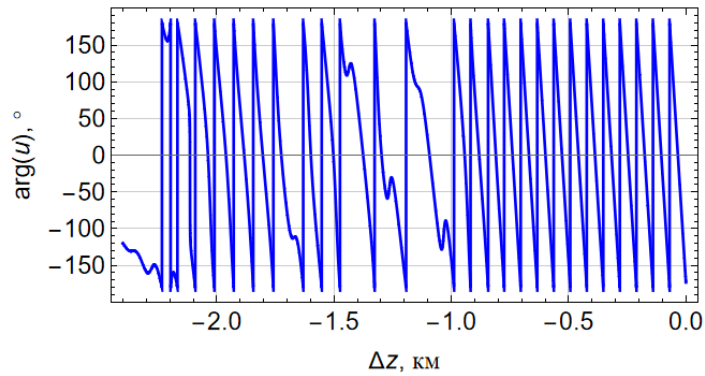


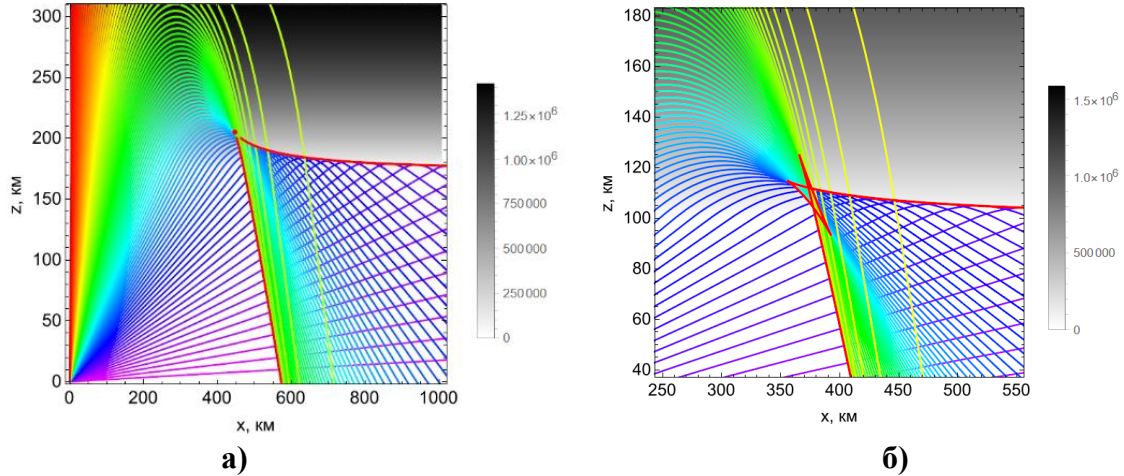
Рис. 5. Фазовая структура в сечении  $\Delta x=10$  км, катастрофа  $A_3$ .

На рис. 3 а и 4 а показаны сечения фазы без учёта фазы бегущей волны, то есть для выражения  $u^*$  справедлива формула (4), но без члена  $e^{i\theta}$ , а на рис. 3 б, 4 б и 5 – полная фаза. Видно, что в этих сечениях полная фаза быстро и почти линейно меняется, а влияние фазы функции Пирси сказывается в виде петель и небольших нарушениях плавности [23].

#### Волновое поле в окрестности катастрофы типа «бабочка»

Теперь рассмотрим трансформацию волнового поля при изменении параметров задачи. Как показано в работах [11,12], при определённых условиях в параболическом плазменном слое возникает особенность типа «бабочка» (катастрофа  $A_5$ ). Положение центра особенности определяется численным решением системы пяти нелинейных

уравнений, полученных приравниванием нулю первых пяти производных фазовой функции (эйконала) [15-17]. В результате находим, что:  $x_o \approx 447.039$  км,  $z_o \approx 205.057$  км,  $z_{ho} \approx 173.778$  км и  $a_o \approx 0.922795$ . Угол выхода луча  $\alpha_o \approx 43.688^\circ$ . На рис. 6 а показана лучевая и каустическая структура при этих параметрах, а на рис. 6 б представлена уже развитая каустическая структура при  $z_h = 100$  км и  $a = 0.95$ .



**Рис.6. Лучевая и каустическая структура а) – при  $a \approx 0.922795$ ,  $z_h \approx 173.778$ , б) – фрагмент,  $z_h = 100$  км,  $a = 0.95$ .**

Красной точкой на рис. 6 а отмечено положение центра особенности.

Поле в окрестности особой точки типа «бабочка» (катастрофа  $A_5$ ) имеет вид [1, 20, 21]:

$$u(x, z) = e^{i\theta} \left( l_1 I^{A_5}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) + l_2 \frac{\partial I^{A_5}}{\partial \lambda_1} + l_3 \frac{\partial I^{A_5}}{\partial \lambda_2} + l_4 \frac{\partial I^{A_5}}{\partial \lambda_3} + l_5 \frac{\partial I^{A_5}}{\partial \lambda_4} \right), \quad (7)$$

где

$$I^{A_5}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[ i(\xi^6 + \lambda_4 \xi^4 + \lambda_3 \xi^3 + \lambda_2 \xi^2 + \lambda_1 \xi) \right] d\xi \quad (8)$$

– специальная функция волновой катастрофы (СВК)  $A_5$ .

Как и в предыдущем случае в особой точке рассчитаны производные эйконала по лучевому параметру, необходимые для определения аргументов функции СВК в виде [20, 21]:

$$\begin{aligned} \lambda_j &\approx \gamma_{jx} \Delta x + \gamma_{jz} \Delta z + \gamma_{jz_h} \Delta z_h + \gamma_{ja} \Delta a, \quad j = 1, \dots, 4, \\ \Delta x &= x - x_o, \quad \Delta z = z - z_o, \quad \Delta z_h = z_h - z_{ho}, \quad \Delta a = a - a_o \end{aligned} \quad (9)$$

и коэффициентов асимптотического разложения в особой точке  $l_j \approx l_j^o$ ,  $j = 1, \dots, 5$ .

На рис. 7 показаны графики амплитуд поля в вертикальных сечениях при различных значениях  $\Delta x$  и  $a = a_o$ ,  $z_h = z_{ho}$ , а на рис. 8 показаны фазовые структуры волнового поля для катастрофы типа  $A_5$ .

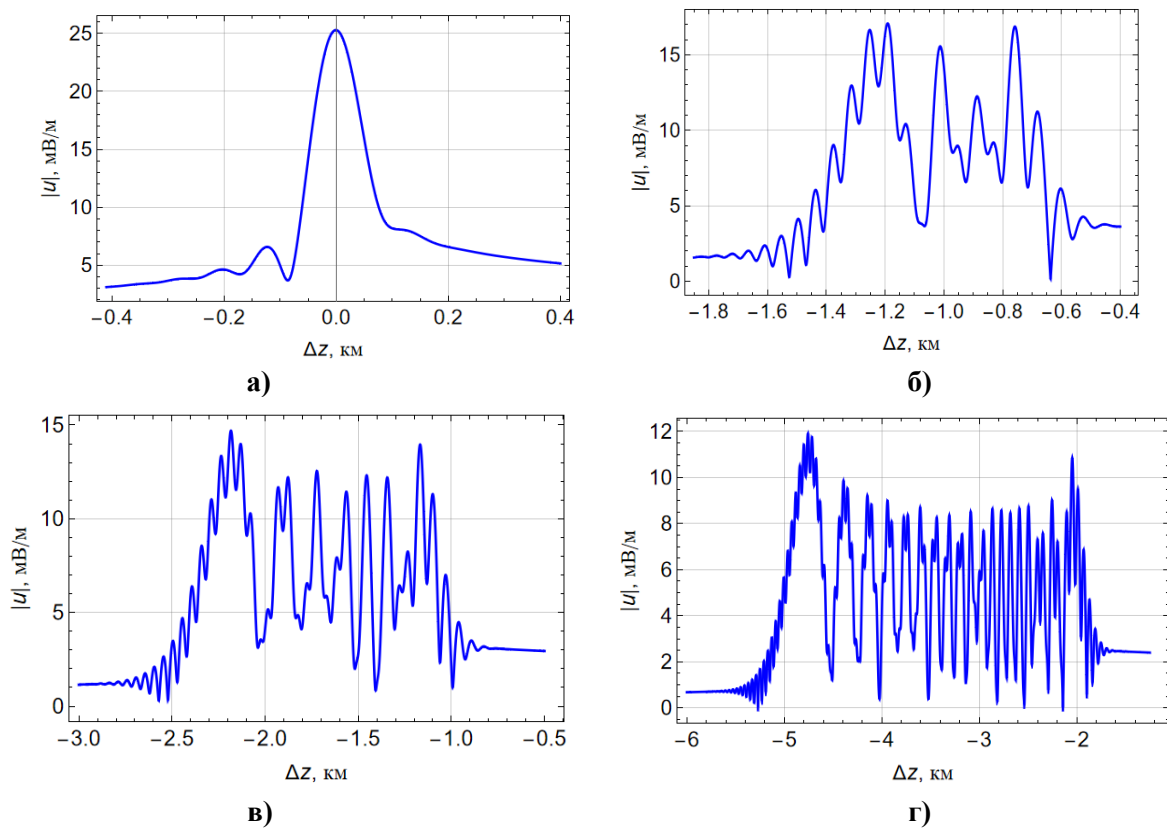


Рис. 7. Вертикальные сечения амплитуды поля, а) –  $\Delta x = 0$  км, б) –  $\Delta x = 1.5$  км, в) –  $\Delta x = 2.5$  км, г) –  $\Delta x = 5$  км, катастрофа  $A_5$ .

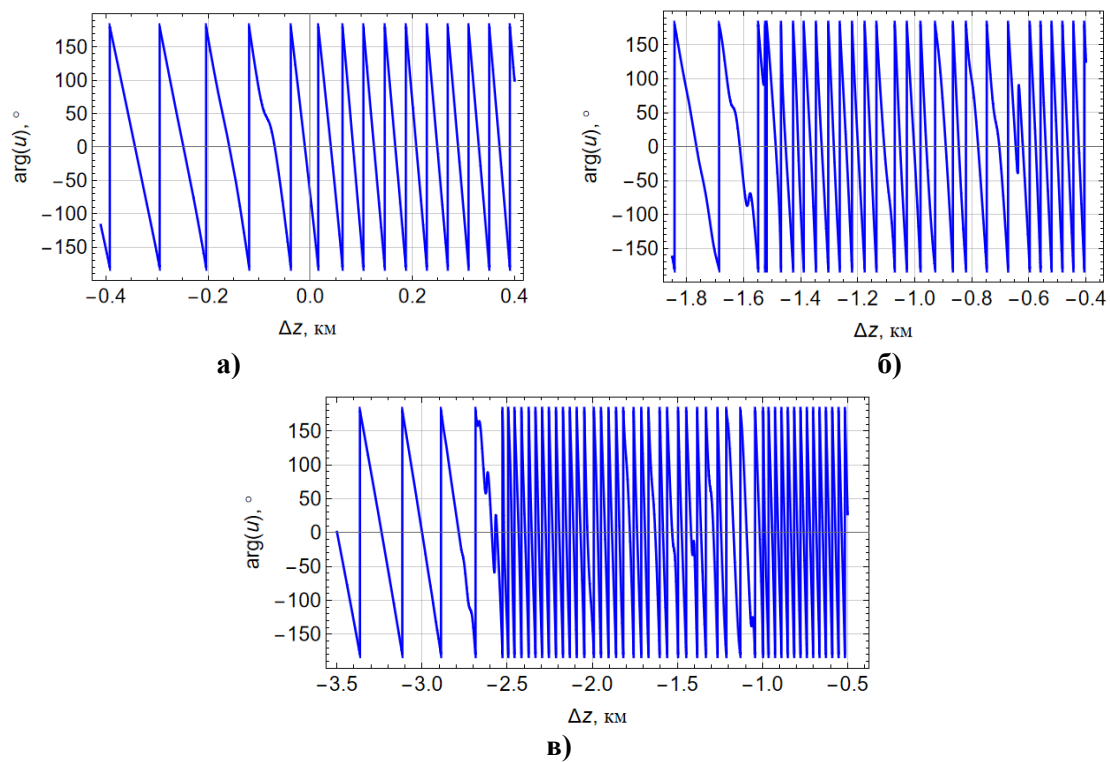


Рис. 8. Фазовая структура в сечениях: а) –  $\Delta x = 0$  км, б) –  $\Delta x = 1.5$  км, в) –  $\Delta x = 2.5$  км, катастрофа  $A_5$ .



Сравнивая рис. 7 и рис. 2, видим, что амплитудная структура существенно изменилась, а максимальные значения амплитуды существенно возросли. Угол между положительными направлениями осей  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  уменьшился и стал равен:  $120.154^\circ$ . При удалении по  $\Delta x$  от центра особенности число осцилляций между каустиками увеличивается, причём как амплитудная, так и фазовая структуры существенно разные. Следует отметить, что, хотя значения параметров  $a$  и  $z_h$  совпадают с особыми значениями, отличными от нуля оказываются не только  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ , но и  $\lambda_3$ ,  $\lambda_4$ .

На рис. 9 показана амплитуда волны в особой (центральной) точке при изменении рабочей частоты  $f = \omega/2\pi$ .

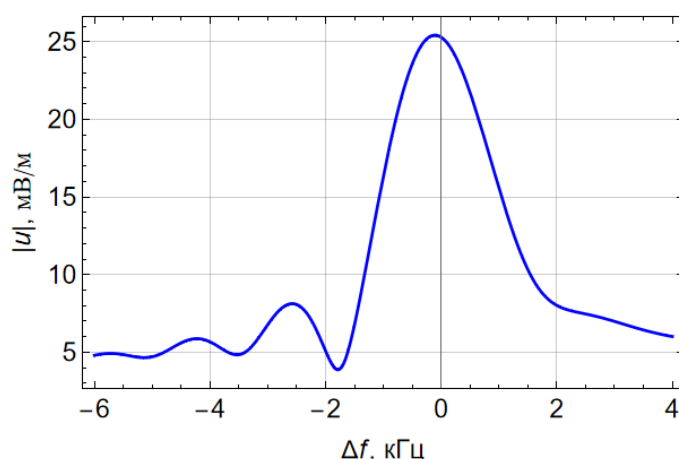


Рис. 9. Амплитуда в вертикальном сечении,  $\Delta x=0$  км, катастрофа  $A_5$ .

Отклонение параметра  $a$ , от  $a_o$  рассчитывалось по формуле:

$$\Delta a = a_o \left( \frac{\omega_p}{\omega_p + a_o 2\pi \Delta f} - 1 \right), \quad (10)$$

где  $\Delta f$  – отклонение рабочей частоты от частоты  $f_o$ , при которой образуется центр особенности:  $f_o = 2\pi\omega_p/a_o$ . Видно, что при изменении частоты амплитуда поля резко падает, что говорит о значительной фокусировке излучения в центральной точке катастрофы  $A_5$ .

### Выводы

В работе исследована трансформация амплитудной и фазовой структуры волнового поля при переходе от каустической особенности типа острей («клюв» –  $A_3$ ), к каустической особенности типа  $A_5$  – «бабочка». Построены лучевые и каустические структуры, для этих особенностей, а также рассчитаны амплитуды и фазы в вертикальных сечениях. Показано, что между осями  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  возникает тупой угол, что свидетельствует о том, что преобразование эталонных координат СВК к декартовым – косоугольное [13]. Показано, что при переходе от особенности  $A_3$  к особенности  $A_5$  максимальные значения амплитуд существенно возрастают, а отстройка частоты порядка 1 кГц от оптимального значения может существенно уменьшить амплитуду.

При выполнении вычислений использовался метод локальной асимптотики, развитый нами в предыдущих работах [18, 20, 21, 24].

Полученные результаты применимы при моделировании КВ радиосвязи в условиях многолучевости.

*Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 25-22-00096.*



## Литература

1. Лукин Д.С., Палкин Е.А. Численный канонический метод в задачах дифракции и распространения электромагнитных волн в неоднородных средах. – М.: МФТИ, 1982. 159 с.
2. Казанцев А.Н., Лукин Д.С., Спиридонов Ю.Г. Метод исследования распространения радиоволн в неоднородной магнитоактивной ионосфере. // Космические исследования. 1967. Т. 5. Вып. 4. С. 593–600.
3. Лукин Д.С., Спиридонов Ю.Г. Применение метода характеристик для численного решения задач распространения радиоволн в неоднородной и нелинейной среде. // Радиотехника и электроника. 1969. Т. 14. №. 9. С.1673–1677.
4. Kryukovskii A.S., Lukin D.S., Kir'yanova K.S. Method of Extended Bicharacteristic System in Simulating Wave Propagation in Ionospheric Plasma // Journal of Communications Technology and Electronics, 2012. V. 57. No. 9. P. 1039–1045.
5. Лукин Д.С., Палкин Е.А. Экспериментальные и численные исследования дифракционных структур волнового поля в областях фокусировки // Распространение декаметровых радиоволн / М.: ИЗМИР АН СССР. 1980. С. 37–46.
6. Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М. Особенности дифференцируемых отображений. Часть I. Классификация критических точек каустик и волновых фронтов. – М.: Наука, 1982. 304 с.
7. Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и её приложения / Пер. с англ. А. В. Чернавского. – М.: Мир, 1980. 608 с.
8. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А. Равномерные асимптотики и угловые катастрофы // Доклады Академии наук. 1995. Т. 341. № 4. С. 456–459.
9. Thom R. Structural Stability and Morphogenesis / tr. from French by D. H. Fowler. Benjamin-Addison-Welsey: New York. 1975. 345 p.
10. Whitney H. On singularities of mappings of Euclidean space 1. Mappings of the plane into the plane // Ann. of Math., 1955. V. 62. P.374–410.
11. Орлов Ю.И. Особенности лучевых и каустических картин в неоднородном параболическом слое // Изв. ВУЗов (Радиофизика). 1976. Т. 20. № 11. С. 1669–1675.
12. Крюковский А.С. Топология каустик и волновое поле в плазменном слое с параболическим распределением электронной концентрации // Труды МФТИ серия «Общая и молекулярная физика» / МФТИ, М., 1979. Вып. 11. С. 74–78.
13. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А. К вопросу о построении асимптотических решений в областях перекрытия прикаустических зон // Изв. ВУЗов МВ и ССО СССР (Радиофизика), 1982, Т. 25, № 11. С. 1375–1376.
14. Крюковский А.С., Растягаев Д.В. Исследование устойчивых фокусировок, возникающих при нарушении симметрии волнового фронта. // Распространение и дифракция электромагнитных волн. М. МФТИ, 1993. С. 20–37.
15. Крюковский А.С., Лукин Д.С. Определение центров топологических особенностей при фокусировке поля в плоскостной среде. // Труды 7-й конференции молодых учёных Московского физико-технического института. 1982. С. 138–148.
16. Крюковский А.С., Растягаев Д.В. Математическое моделирование трансформаций особых каустических структур радиоволн в неоднородных средах // Всероссийские открытые Армандовские чтения "Муром 2025". Материалы Всероссийской открытой научной конференции и Молодёжной школы–конференции. Муром, 2025. С. 34–41.
17. Крюковский А.С., Растягаев Д.В. Трансформация каустических структур типа катастроф при распространении электромагнитных волн в холодной плазме // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2025. Т. 33. № 5. С. 615–628.

18. Крюковский А.С., Лукин Д.С. Локальное асимптотическое описание электромагнитного поля в окрестности каустического острия в плоско-слоистой среде. // Вопросы дифракции электромагнитных волн. Межвед. сборник / МФТИ. М., 1982. С. 40–45.
19. Pearcey T. The structure of an electromagnetic field in the neighborhood of a cusp of a caustic // Philos. Mag., 1946. V. 37. P. 311–317.
20. Крюковский А.С. Локальные равномерные асимптотики волновых полей в окрестности основных и краевых каспидных каустик. // Радиотехника и электроника. 1996. Т.41. № 1. С. 59–65.
21. Крюковский А.С. Равномерная асимптотическая теория краевых и угловых волновых катастроф. Монография. М.: РосНОУ, 2013.–368 с.
22. Budden K.G. Radio caustics and cusps in the ionosphere // Proc. Roy. Soc. London. 1976. V. A350. № 1661. P. 143–164.
23. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А. Численное сравнение асимптотических выражений для электромагнитного поля в окрестностях топологических особенностей типа складки и сборки // Вопросы дифракции электромагнитных волн. Междувед. сборник / МФТИ, М., 1982. С. 134–137.
24. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А. Равномерные асимптотики интегралов от быстроосциллирующих функций с вырожденными седловыми точками: Препринт /ИРЭ АН СССР. М., 1984. № 41 (413). 75 с.