

В.А. Котельников - основоположник научных направлений статистической радиотехники и цифровой обработки сигналов

Л.Е. Назаров¹, С.А. Никитов²

¹ Фрязинский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова
Российской академии наук 141190, г. Фрязино Московской области, пл. Введенского 1
E-mail: levnaz2018@mail.ru

² Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова Российской академии
наук, 125009, Москва, ул. Моховая 11, корп. 7
E-mail: nikitov@cplire.ru

Приведены результаты анализа классических трудов академика Владимира Александровича Котельникова - основоположника направлений статистической радиотехники и цифровой обработки сигналов. Основу теории статистической радиотехники составляет математический аппарат теории вероятности, математической статистики и теории случайных процессов. С использованием этих подходов синтезированы алгоритмы оптимальной обработки сигналов при передаче/приеме информационных сообщений дискретного и аналогового типа (теория потенциальной помехоустойчивости).

Ключевые слова: статистическая радиотехника, сигналы, цифровая обработка сигналов

V.A. Kotelnikov - the founder of the scientific fields of statistical radioengineering and digital signal processing

L.E. Nazarov¹, S.A. Nikitov²

¹ Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics (Fryazino Branch).

² Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics.

This article presents the results of the classic work analysis of Academician Vladimir Aleksandrovich Kotelnikov a pioneer in the fields of statistical radio engineering and digital signal processing. The theory of statistical radio engineering is based on the mathematical apparatus of probability theory, mathematical statistics and the theory of random processes. Using these approaches algorithms for optimal signal processing for the transmission and reception of discrete and analog information messages (the theory of potential noise immunity) have been synthesized.

Keywords: statistical radio engineering, signals, digital signal processing

Введение

При определении значения трудов академика Владимира Александровича Котельникова в создании и развитии научных направлений, связанных с теорией статистической радиотехники и цифровой обработки сигналов, необходимо учитывать многочисленные недавние публикации, посвященные этой теме, например [1-11]. В этих публикациях достаточно подробно и квалифицированно проведен анализ трудов В.А. Котельникова, связанных с данными тематиками, и определен их фундаментальный вклад при становлении рассматриваемых направлений. Вследствие этого наряду с необходимыми общими повторениями содержаний и выводов известных публикаций актуален анализ современного состояния теории статистической радиотехники и цифровой обработки и их практических приложений [12].

Предмет статистической радиотехники составляет анализ априорных моделей систем передачи/приема дискретных сообщений различного назначения

(информационные системы спутникового и наземного базирования, включая современные системы сотового формата; спутниковые системы глобальной навигации; системы радиолокации и гидролокации, др.) и статистические апостериорные выводы относительно вероятностных характеристик - вероятностей различения сигналов информационных систем передачи дискретных сообщений; вероятностей обнаружения сигналов локационных систем при их распространении; точности оценивания параметров сигналов систем связи и навигации [12,13].

Техническое исполнение этих информационных систем базируется на методах цифровой обработки сигналов, основу которых составляет теорема Котельникова, суть которой - возможность представления аналоговых сигналов в цифровом формате без информационных потерь (аналого-цифровое преобразование) [14, 15].

Цель работы - общее описание теории статистической радиотехники и теории цифровой обработки сигналов, подход при создании и современном развитии которых основан на классических трудах Владимира Александровича Котельникова.

Теоретические основы статистической радиотехники

При применении методов статистической радиотехники апостериорные выводы при обработке входных реализаций производятся на основе ограниченного объема анализируемых данных (ограниченного объема выборок входной реализации). В этих условиях крайне важной является проблема синтеза алгоритмов их обработки, которые позволяют наилучшим образом использовать эту информацию (в соответствии с задаваемыми количественными критериями) [16]. В частности, для проблемы различения дискретных сигналов при приеме критерий качества обработки входных реализаций основан на минимизации вероятностей ошибочных решений на бит P_0 (на дискретный сигнал либо на сигнал $P_{0ш}$) при приеме [13, 14, 16].

При оценивании параметров дискретных сообщений (несущая частота, начальная фаза, время прихода сигналов, др.) оптимальные алгоритмы, удовлетворяющие критериям качества, в современной формулировке должны обладать свойствами несмещенности (асимптотической несмещенности), состоятельности, достаточности и эффективности (достижение максимальной точности или минимальной дисперсии оценки, определяемой нижней границей Крамера-Рао) [13,16].

Результаты относительно синтеза оптимальных методов и алгоритмов обработки сигналов, удовлетворяющих сформулированным критериям, практически близки (хотя и не в полной мере) к изложенным В.А. Котельниковым в диссертационной работе «Теория потенциальной помехоустойчивости», представленной к защите осенью 1947 г. В 1956 г. текст диссертации опубликован в виде книги [17]. Используемый в этой работе математический аппарат для анализа распространения и обработки сигналов основан на использовании теории вероятностей, математической статистики и теории случайных процессов [18], которые были к этому времени достаточно разработанными. Вместе с тем, теоретические положения этих теорий для решения проблем статистической радиотехники в полной мере применены в диссертационной работе В.А. Котельникова, используемый подход при решении комплекса рассматриваемых задач, используя методы теории вероятностей и математической статистики, являлся совершенно новым для исследователей и инженеров этого времени, в опубликованной книге [17] приведена единственная ссылка.

В части создания модели системы передачи дискретных сообщений с использованием сигналов с цифровой манипуляцией и синтеза методов и алгоритмов их оптимальной обработки задача сформулирована следующим образом: для передаваемых сигналов $s(t)$ ($0 \leq t < T$) и соответствующих входных реализаций $x(t) = as(t) + n(t)$

требуется определить математическое правило оптимального отображения $x(t) \rightarrow s(\lambda, t)$, минимизирующего искажающее влияние аддитивного шума $n(t)$ (в частности, минимизирующего вероятность ошибки P_0) [13,16]. Здесь a - полагаемый известным коэффициент передачи канала.

Для систем передачи дискретных сообщений (рис.1) с использованием множества сигналов $s(\lambda_i, t)$ с объемом M , значения параметра λ_i дискретны $i=1,2,...,M$.



Рис.1. Блок-схема системы передачи дискретных сообщений.

При передаче/приеме информационного вектора $\vec{\lambda}$ с размерностью k аналогового типа (телеметрические системы, оценивание непрерывных величин частоты, начальной фазы, времени прихода при реализации частотной, фазовой, тактовой синхронизаций, др.) элементы вектора $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k)$ являются непрерывными величинами [16].

Алгоритм обработки реализаций $x(t)$ при приеме сигналов $s(\lambda_i, t)$ в системах передачи дискретных сообщений основан на теории проверки статистических гипотез [16, 18]. При условии равновероятности передачи сигналов $s(\lambda_i, t)$ оптимальное правило приема в современной формулировке, реализующее приведенный выше статистический критерий относительно минимального значения P_0 , формализуется следующим образом: принимается решение о передаче сигнала $s(\lambda_m, t)$, если для всех $j \neq m$ выполняется условие [16, 17]

$$\int_0^T V_{mj}(t)x(t)dt \geq \frac{1}{2} \int_0^T V_{mj}(t)[s(\lambda_m, t) + s(\lambda_j, t)]dt, \quad (1)$$

здесь $V_{mj}(t)$ - решение линейного интегрального уравнения

$$\int_0^T B(t-u)V_{mj}(u)du = s(\lambda_m, t) - s(\lambda_j, t), \quad t \in [0, T], \quad (2)$$

где $B(t)$ - корреляционная функция аддитивного канального шума $n(t)$.

Условие (1) эквивалентно вычислению и сравнению апостериорных вероятностей $\Pr(s(\lambda_i|x(t)))$, $i=1,2,...,M$ и выборе максимального значения, соответствующего λ_m .

В диссертационной работе В.А. Котельникова рассмотрена модель канала передачи с аддитивным стационарным белым гауссовским шумом (АБГШ) $n(t)$ с односторонней спектральной плотностью N_0 . Для модели АБГШ решение интегрального уравнения (2)

$V_{mj}(t) = \frac{2}{N_0} [s(\lambda_m, t) - s(\lambda_j, t)]$. В этом случае условие (1) приводится к виду [13,17]

$$\int_0^T [as(\lambda_j, t) - x(t)]^2 dt \geq \int_0^T [as(\lambda_m, t) - x(t)]^2 dt, \quad (3)$$

На рис.2 приведена блок-схема алгоритма (3) оптимального приема равновероятных дискретных сигналов $s(\lambda_j, t)$, $j=1,2,...,M$ для АБГШ канала: принимается решение относительно сигнала с параметром $s(\lambda_m, t)$ при условии достижения минимума евклидова расстояния между $as(\lambda_m, t)$ и $x(t)$ [14, 16].

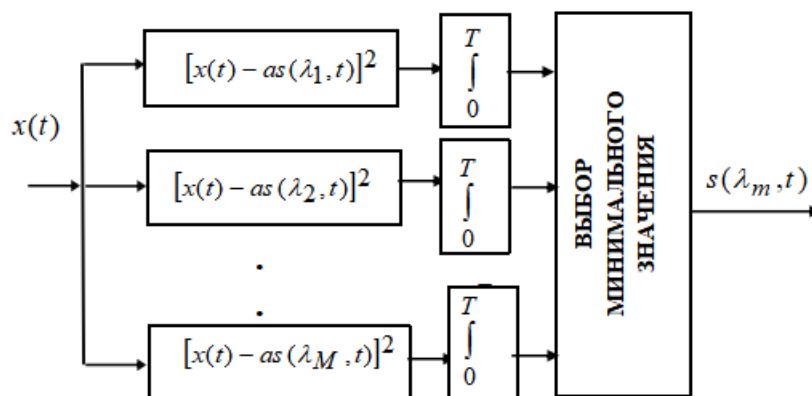


Рис.2. Блок-схема алгоритма оптимального приема (2) равновероятных сигналов $s(\lambda_j, t)$, $j=1,2,...,M$ для АБГШ канала.

Модель АБГШ канала представляется обобщенной дельта-функцией $B(t) = \frac{N_0}{2} \delta(t)$ [14, 16], то есть мощность шума является неограниченной, что представляется физически необоснованным предположением. Вместе с тем, предложенная модель принята научным сообществом в качестве базовой и интенсивно используется при теоретическом анализе информационных систем [13-16].

В диссертационной работе В.А. Котельниковым рассмотрено обобщение модели АБГШ канала с неравномерной спектральной плотностью мощности $N(f)$ («окрашенный» шум). В этом случае предложено применять алгоритм оптимального приема (1) с включением обесцараживающего фильтра для реализации $x(t)$ на входе демодулятора сигналов. Развитие этого подхода представляет вычислительный алгоритм обработки входной реализации $x(t)$, задаваемый соотношениями (1) на основе решения неоднородного линейного интегрального уравнения (2). Рассмотрение «окрашенного» шума в диссертационной работе составило основу самостоятельного научного направления по разработке моделей для ряда более сложных каналов передачи со свойствами частотно-селективного замирания, с дисперсионными свойствами (ионосферные, тропосферные каналы передачи) [13-16, 19].

Современное представление моделей каналов передачи (рис.1) определяет проблему корректного определения устойчивых (робастных) алгоритмов обработки входных реализаций [20]. Для АБГШ канала вычислительная процедура (1) в этом смысле не является робастной относительно принятой нормальной плотности распределения, в научном сообществе является устоявшимся утверждение «нормальность – это миф, нормального распределения никогда не было и никогда не будет» [20]. Робастность означает нечувствительность к малым отклонениям от статистических предположений, например, относительно моделей плотности распределения шума $n(t)$. В теории робастной статистики предложен ряд процедур робастной обработки реализаций $x(t)$ с цензурированием анализируемых отсчетов $x(t_i)$, т.е. с их предварительной обработкой (M -, L -, R - оценки) при реализации вычислительного алгоритма (1). Наиболее известной

является M - оценка, т.е. нелинейное преобразование $x(t_i)$ с использованием метрики $\rho(x(t_i))$ [20]

$$\rho(\hat{x}(t_i)) = \rho(x_i) = \begin{cases} x_i^2 / 2, \text{ если } |x_i| \leq b, \\ b|x_i| - b^2 / 2, \text{ если } |x_i| > b. \end{cases} \quad (4)$$

В этом случае нелинейное преобразование отсчетов $x(t_i)$ задается соотношением $\hat{x}(t_i) = \rho'(x_i)$. В качестве компромисса предлагается нормированное значение $b = 1.5$.

Оценивание значений непрерывных элементов вектора $\vec{\lambda}$ сигналов $s(\vec{\lambda}, t)$ задаются решениями системы интегральных уравнений [16]

$$\int_0^T \frac{\partial}{\partial \lambda_i} V(\vec{\lambda}, t) [x(t) - as(\vec{\lambda}, t)] dt = 0, \quad i = 1, \dots, k, \quad (5)$$

$V(\vec{\lambda}, t)$ - решение неоднородного линейного интегрального уравнения

$$\int_0^T B(t, u) V(\vec{\lambda}, u) du = s(\vec{\lambda}, t), \quad t \in [0, T].$$

Для АБГШ канала решение $V(\vec{\lambda}, t) = \frac{2}{N_0} s(\vec{\lambda}, t)$ и система (5) упрощается

$$\int_0^T \frac{\partial}{\partial \lambda_i} s(\vec{\lambda}, t) [x(t) - as(\vec{\lambda}, t)] dt = 0, \quad i = 1, \dots, k. \quad (7)$$

В диссертационной работе В.А. Котельникова произведен анализ передачи дискретных сообщений по АБГШ каналу с использованием ряда дискретных сигналов. В частности, для ансамблей ортогональных сигналов с объемом M доказано выражение относительно вероятности ошибочного приема сигналов $P_{\text{ош}}$ при использовании алгоритма (1) [17]

$$P_{\text{ош}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2 / 2) [1 - F(x + \sqrt{2E_6 \log 2 M / N_0})]^{M-1} dx, \quad (8)$$

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp(-y^2 / 2) dy, \quad E_6 - \text{энергия сигналов на бит.}$$

Вычисление (8) показывает монотонной уменьшение вероятности ошибки $P_{\text{ош}}$ при увеличении параметра M при постоянном значении отношения E_6 / N_0 . Замечательным свойством ансамблей ортогональных сигналов при увеличении объема M является пороговый эффект относительно $P_{\text{ош}}$ [21]

$$P_{\text{ош}} \underset{M \rightarrow \infty}{=} \begin{cases} 1, & \frac{E_6}{N_0} < \ln 2 \\ 0, & \frac{E_6}{N_0} > \ln 2 \end{cases}, \quad (9)$$

то есть, использование ансамблей ортогональных сигналов обеспечивает безошибочную передачу при условии $M \rightarrow \infty$ и условии $\frac{E_0}{N_0} > \ln 2$ (при этом требуется неограниченная

частотная полоса канала) [21]. Предельное соотношение (9) имеет особое значение для теории информации, определяющей пропускную способность Шеннона C и возможность организации безошибочной передачи с информационной скоростью, достигающей C [22]

$$C = W \log_2 \left(1 + \frac{S}{N_0 W} \right) \text{ бит/с}, \quad (10)$$

S - мощность сигнала; W - частотная полоса канала.

При доказательстве соотношения относительно C (10) К. Шеннон (1948 г.) переоткрыл основные положения теории потенциальной помехоустойчивости В.А. Котельникова. Следует отметить, что в работе К. Шеннона не даются рекомендации о выборе дискретных сигналов, использование которых обеспечивает достижение вероятностно-энергетических характеристик, определяемых пропускной способностью C . При увеличении частотной полосы W асимптотическое выражение (10) имеет вид

$$C_{W \rightarrow \infty} = \frac{E_0}{N_0 \ln 2}, \quad (11)$$

определяющее минимальное значение сигнал/шум $\frac{E_0}{N_0} > \ln 2$, при котором теоретически

возможна безошибочная передача информации без ограничений на используемые сигналы с частотной полосой W .

Предельные значения сигнал/шум, задаваемые соотношениями (9) и (11), совпадают. Вместе с тем в диссертационной работе В.А. Котельникова предложен класс сигналов, с использованием которых теоретически возможна безошибочная передача информации по АБГШ каналам с предельным отношением сигнал/шум. Таким образом, В.А. Котельниковым сделаны первоначальные шаги по созданию теории информации, развитие которой выполнено в последующем К. Шенноном [22]. Развиваемое в настоящее время направление корректирующего кодирования, которое применяется при разработке систем передачи дискретных сообщений с характеристиками, близкими к характеристикам пропускной способности C , основано на использовании методов теории потенциальной помехоустойчивости в части реализации демодулятора сигналов Котельникова (рис.1) [14].

Теорема отсчетов Котельникова - основа цифровой обработки сигналов

Аналого-цифровое преобразование реализует представление в цифровом формате аналоговых сигналов $s(t)$ с ограниченной частотной полосой W аппроксимационным рядом Котельникова $\hat{s}(t)$ с временными отсчетами $s(i\Delta t)$ с частотой дискретизации $f_d \geq 2W$ (период дискретизации $\Delta t \leq 1/2W$) [14, 15]

$$\hat{s}(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} s(i\Delta t) \text{sinc} \left(\frac{\pi(t-i\Delta t)}{\Delta t} \right), \quad \text{sinc}(x) = \sin(x)/x. \quad (12)$$

Аппроксимационный ряд (2) характеризуется следующими особенностями:

- медленная сходимость ряда - требуется достаточно большое число слагаемых, обеспечивающее требуемую точность представления $s(t)$ [13];

- представление сигналов суммой дискретных отсчетов с весами входит в класс плохо обусловленных задач, т.е. небольшие погрешности при вычислении весовых

коэффициентов либо при вычислении значений отсчетов могут привести к значительным погрешностям значений $\hat{s}(t)$ по отношению к $\hat{s}(t)$ [23];

- приближенное вычисление сигналов $\hat{s}(t)$ вследствие ограничения длительности сигналов $s(t)$ или ограниченности частотной полосы [14];

- сходимость аппроксимационного ряда в евклидовой метрике L_2 [13].

Уместно отметить, что известно и другое альтернативное аналого-цифровое преобразование сигналов с ограниченной частотной полосой W [13]

$$\hat{s}(t) = s(0) + \frac{t}{h} \Delta s(0) + \frac{t(t-h)}{2!h^2} \Delta^2 s(-h) + \left(\frac{t+h}{3} \right) \frac{\Delta^3 s(-h)}{h^3} + \dots, \quad (13)$$

где $h = 1/2W$; $\Delta s(nh) = s(nh+h) - s(nh)$; $\Delta^{k+1} s(nh) = \Delta[\Delta^k s(nh)]$;

$$\binom{t+mh}{r} = \frac{(t+mh)(t+mh-h) \cdot \dots \cdot (t+mh-rh+h)}{r!}.$$

Несмотря на отмеченные особенности, именно аппроксимационный ряд Котельникова (12) вследствие простоты вычислений и физической ясности используется как базис цифровой обработки сигналов и составляет основу аналого-цифрового преобразования при исполнении алгоритмов оптимальной обработки, включая алгоритмы различения (приема) дискретных сигналов информационных систем различного назначения.

Международный научный фонд Эдуарда Рейна (Германия) в 1999 г. наградила В.А. Котельникова за впервые доказанную в аспекте коммуникационных технологий теорему отсчетов (в англоязычной научной литературе - теорема Уиттекера-Котельникова-Шеннона). Это свидетельствует об уважении и международной признательности Владимиру Александровичу за вклад в науку.

Выводы

Приведены результаты анализа классических трудов академика Владимира Александровича Котельникова, которые положили начало созданию и развитию направлений статистической радиотехники и цифровой обработки сигналов. Основу теории статистической радиотехники составляет математический аппарат теории вероятности, математической статистики и теории случайных процессов. С использованием этих подходов синтезированы алгоритмы оптимальной обработки сигналов при передаче/приеме информационных сообщений дискретного и аналогового типа (теория потенциальной помехоустойчивости). Исполнение этих алгоритмов эффективно, применяя элементную базу цифровой вычислительной техники (цифровые сигнальные процессоры, программируемые логические интегральные схемы) и используя теорему Котельникова аналого-цифрового преобразования. Методы статистической радиотехники и цифровой обработки сигналов широко используются в радио- и гидролокации, в системах наземной и спутниковой связи, в системах управления, телеметрии, навигации, радиоизмерений, др.

Литература

1. К 100-летию со дня рождения академика В.А. Котельникова. Совместная научная сессия Отделения физических наук Российской академии наук и Отделения нанотехнологий и информационных технологий Российской академии наук. // Успехи физических наук. 2009. Т. 179. №2. С. 202
2. Котельников В А Судьба, охватившая век. В 2 томах. Том 1. Воспоминания коллег. М.: Физматлит, 2011. 312 с.

3. Котельников В.А. Судьба, охватившая век. В 2 томах. Том 2. Н.В. Котельникова об отце. М.: Физматлит, 2011. 412 с.
4. Гуляев Ю.В., Котельникова Н.В., Котельников В.А., Арманд Н.А., Сачков В.Н., Молотков С.Н., Черток Б.Е. «Научная сессия Отделения физических наук Российской академии наук, посвященная памяти академика Владимира Александровича Котельникова (22 февраля 2006 г.)» // Успехи физических наук. 2006. Т.176. №7. С.751-756.
5. Арманд Н.А. Роль В.А. Котельникова в становлении радиофизики и радиотехники. // Успехи физических наук. 2006. Т.176. №7. С.770-775.
6. Сачков В.Н. В.А. Котельников и отечественная шифрованная связь. // Успехи физических наук. 2006. Т.176. №7. С.775-777
7. Молотков С.Н. Квантовая криптография и теорема В.А. Котельникова об одноразовых ключах и об отсчетах. // Успехи физических наук. 2006. Т.176. №7. С. 777-788.
8. Котельникова Н.В. Владимир Александрович Котельников: дорога ученого. // Успехи физических наук. 2006. Т.176. №7. С. 753-762.
9. «К 100-летию со дня рождения академика В.А. Котельникова (Совместная научная сессия Отделения физических наук Российской академии наук и Отделения нанотехнологий и информационных технологий Российской академии наук, 17 сентября 2008 г.)» // Успехи физических наук. 2009. Т.179. №2. С. 201-224.
10. Зеленый Л.М., Арманд Н.А. Владимир Александрович Котельников и исследования Солнечной системы. // Успехи физических наук. 2009. Т.179. №2. С. 201-224.
11. Никитов С.А., Назаров Л.Е. Труды академика В.А. Котельникова (период 1932—1946 гг.) — основа научных направлений шифрования, криптографии и потенциальной помехоустойчивости. // Успехи физических наук. 2025. Т.195. №12. С. 1282-1288.
12. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Книга первая. М.: Изд-во «Советское радио». 1969. 752 с.
13. Балакришнан А.В., Карлил Дж. В., Рут В.Л., др. Теория связи. Перевод с англ. М.: «Связь». 1972. 292 с.
14. Склад Б. Цифровая связь. Теоретические основы практическое применение. Перевод с английского. М.: Издательский дом «Вильямс». 2003. 1104 с.
15. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. М.: Мир. 1978. 848 с.
16. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Книга вторая. М.: Изд-во «Советское радио». 1975. 392 с.
17. Котельников В.А. Теория потенциальной помехоустойчивости. Москва, Ленинград. Государственное энергетическое издательство. 1956. 153 с.
18. Боровков А.А. Математическая статистика. Оценка параметров. Проверка гипотез. М.: Наука. Главная редакция физико-математических наук. 1984. 472 с.
19. Назаров Л.Е., Батанов В.В. // Радиотехника и электроника. 2022. Т.67. №11. С. 1133.
20. Хьюбер П. Робастность в статистике. Перевод с английского. М.: Мир. 1984. 292 с.
21. Витерби Э.Д. Принципы когерентной связи. М.: Советское радио. 1970. 392 с.
22. Шеннон К. Работы о теории информации и кибернетике. М.: Издательство иностранной литературы. Перевод с английского. 1963. 828 с.
23. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.:Наука. 1979.