УДК: 537.8 DOI: 10.24412/2304-0297-2025-1-78-83

Уравнения Гельмгольца для гиротропных волноводов при нормальном намагничивании с учетом тепловых потерь

Г.Б. Итигилов, В.А. Кравченко, Д.Ш. Ширапов, А.В. Парфенов

Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления, 670013, г. Улан-Удэ, ул. Ключевская, 40В, строение 1

E-mail: shir48@mail.ru

Из общих уравнений Гельмгольца гибридных НЕ- и ЕН- электромагнитных волн для регулярных гиротропных волноводов с ортогонально-криволинейными формами поперечного сечения при нормальном намагничивании, учитывающих тепловые потери [8], получены частные уравнения Гельмгольца гибридных НЕ- и ЕН- электромагнитных волн для гиротропных нормально намагниченных волноводов прямоугольной, круглой и эллиптической формами поперечного сечения, также учитывающих тепловые потери.
Ключевые слова: уравнения Гельмгольца, гибридные электромагнитные волны, гиротропный волновод, нормальное намагничивание, поперечное сечение, тепловая потеря.

Helmholtz equations for gyrotropic waveguides under normal magnetization, taking into account heat losses

G.B. Itigilov, V.A. Kravchenko, D.Sh. Shirapov, A.V. Parfenov

East Siberian State University of Technology and Management

From the general Helmholtz equations of hybrid HE- and EH- electromagnetic waves for regular gyrotropic waveguides with orthogonally curved cross-sectional shapes under normal magnetization, taking into account heat losses [8], partial Helmholtz equations of hybrid HE- and EH- electromagnetic waves for gyrotropic normally magnetized waveguides with rectangular, round and elliptical cross-sectional shapes are obtained, also taking into account heat losses.
Keywords: Helmholtz equations, hybrid electromagnetic waves, gyrotropic waveguide, normal magnetization, cross section, heat loss.

Введение

В сверхвысокочастотных (СВЧ) устройствах, таких как изоляторы, циркуляторы, фазовращатели, миниатюрные антенны в диапазоне (1-100 ГГц) используются ферриты, обладающие высокой намагниченностью и магнитной проницаемостью, также высокой диэлектрической проницаемостью и электрическим сопротивлением, низкими электронными и магнитными потерями [1,2].

В работе [3] приводятся экспериментально полученные основные характеристики различных ферритов, применяемых при изготовлении СВЧ устройств. Из них следуют, что применяемые на практике ферриты имеют тангенс угла диэлектрических потерь в диапазоне $(2{,}5\div25)\cdot10^{-4}$, что является значительной величиной. Поэтому, для более точного анализ характеристик распространяющихся электромагнитных волн в гиротропных волноводах, необходимо учитывать тепловые потери.

Известно, что гиротропные волноводы можно намагничивать внешним магнитным полем как вдоль, так и поперек направления распространения электромагнитной волны [4-7]. Отметим, что поперечное намагничивание делится на касательное и нормальное.

Целью этой статьи является определение частных уравнений Гельмгольца гибридных *HE*- и *EH*- электромагнитных волн для нормально намагниченных гиротропных прямоугольных, круглых и эллиптических волноводов, учитывающие тепловых потери, которые в последующем позволят поставить и решить краевые задачи для указанных гиротропных волноводов.

Общие уравнения Гельмгольца гибридных волн, учитывающие тепловых потерь, для регулярных нормально намагниченных гиротропных волноводов с произвольными ортогональным формами поперечного сечения

В [8] были получены общие формулы, позволяющие вывести уравнения Гельмгольца как гибридной *HE*- , так и *EH*- электромагнитной волны, для гиротропных волноводов с ортогонально-криволинейными формами поперечного сечения при нормальном намагничивании с учетом тепловых потерь. Уравнение для гибридной *HE*-волны имеет вид [8]

$$\Delta_{11}H_Z + \Delta_{22}H_Z + j\gamma(\delta_1 H_1 + \delta_2 H_2) - j\omega^2\varepsilon' m H_2 + \omega^2\varepsilon'\mu H_Z = 0, \qquad (1)$$

а гибридной *EH*- волны

$$\mu_{\|}\Delta_{11}E_Z + \mu\Delta_{22}E_Z + j\gamma(\mu_{\|}\delta_1 E_1 + \mu\delta_2 E_2) + \omega\mu_{\|} m\delta_1 H_Z + \omega^2\varepsilon'\mu_{\|}\mu E_Z = 0, \qquad (2)$$

где при нормальном намагничивании в тензоре магнитной проницаемости феррита [8]

$$\mu_{11} = \mu_{\|}, \mu_{22} = \mu_{33} = \mu, k = l = 0, m \neq 0,\ \mu_{\|} \approx \mu_0, \mu = \mu_0 + \mu_0\frac{Y\mu_0 M_0\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2};$$

$$\Delta_{11} = \delta_1\nabla_1 = \frac{1}{h_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \Gamma_{21}^2\right)\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial x_1}\right) = \frac{1}{h_1^2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{11}^1\right)\frac{\partial}{\partial x_1};$$

$$\Delta_{22} = \delta_2\nabla_2 = \frac{1}{h_2}\left(\frac{\partial}{\partial x_2} + \Gamma_{12}^1\right)\left(\frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\right) = \frac{1}{h_2^2}\left(\frac{\partial}{\partial x_2} + \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{22}^2\right)\frac{\partial}{\partial x_2};$$

$$\nabla_1 = \frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial x_1};\ \nabla_2 = \frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial x_2};\ \delta_1 = \frac{1}{h_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \Gamma_{21}^2\right);\ \delta_2 = \frac{1}{h_2}\left(\frac{\partial}{\partial x_2} + \Gamma_{12}^1\right);$$

x_1, x_2 - поперечные координатные оси произвольной ортогональной системы координат; h_1, h_2 - коэффициенты Ламэ поперечных координатных осей; $\Gamma_{12}^1 = \frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial x_2}, \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{h_2}\frac{\partial h_2}{\partial x_1}$, $\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial x_1}, \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{h_2}\frac{\partial h_2}{\partial x_2}$ – символы Кристоффеля 2-го рода; (E_z, H_z) – продольные компоненты напряженностей электрического и магнитного полей; j – мнимая единица; γ - постоянная распространения; $\varepsilon' = \varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega}$ – комплексная диэлектрическая проницаемость феррита; ε – абсолютная диэлектрическая проницаемость феррита; ω – циклическая частота; σ – удельная электрическая проводимость феррита.

В уравнениях (1) и (2) [4,7]

$$m = \mu_0 \frac{\omega Y \mu_0 M_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \tag{3}$$

Поперечные компоненты напряженностей электрического и магнитного полей для гиротропных волноводов с ортогонально-криволинейными формами поперечного сечения при нормальном намагничивании, учитывающие тепловые потери, также были получены в [8]

$$\begin{cases} E_1 = -\dfrac{j\gamma}{b^2}\left\{\nabla_1 E_z + \dfrac{\omega\mu}{\gamma}\left(\nabla_2 + \dfrac{m}{\mu}\gamma\right)H_z\right\}, \\ E_2 = -\dfrac{j\gamma}{a^2}\left\{\nabla_2 E_z - \dfrac{\omega\mu_\parallel}{\gamma}\nabla_1 H_z\right\}, \\ H_1 = \dfrac{j\gamma}{a^2}\left\{\dfrac{\omega\varepsilon'}{\gamma}\nabla_2 E_z - \nabla_1 H_z\right\}, \\ H_2 = -\dfrac{j\gamma}{b^2}\left\{\dfrac{\omega\varepsilon'}{\gamma}\nabla_1 E_z + \left(\nabla_2 + \dfrac{\omega^2\varepsilon' m}{\gamma}\right)H_z\right\}, \end{cases} \tag{4}$$

где $a^2 = \omega^2\varepsilon'\mu_{11} - \gamma^2 = \omega^2\varepsilon'\mu_\parallel - \gamma^2$; $b^2 = \omega^2\varepsilon'\mu_{22} - \gamma^2 = \omega^2\varepsilon'\mu - \gamma^2$.

Далее, подставляя (4) в (1), определим общее уравнение Гельмгольца *HE*- волны для регулярного обобщенного гиротропного волновода с ортогонально-криволинейными формами поперечного сечения при нормальном намагничивании, учитывающие тепловые потери, относительно продольных компонент напряженностей электрического и магнитного полей

$$\frac{\mu_\parallel}{\mu}\frac{b^2}{a^2}\Delta_{11}H_Z + \Delta_{22}H_Z + \left(c^2 + \frac{m}{\mu}\gamma\frac{\Gamma_{12}^1}{h_2}\right)H_z = \left(\frac{b^2 - a^2}{a^2}\right)\frac{\gamma}{\omega\mu}\Delta_{12}E_z + \frac{\omega\varepsilon' m}{\mu}\nabla_1 E_z, \tag{5}$$

где $c^2 = \omega^2\varepsilon'\dfrac{\mu^2 - m^2}{\mu} - \gamma^2$, $\Delta_{12} = \dfrac{1}{h_1 h_2}\dfrac{\partial}{\partial x_1}\dfrac{\partial}{\partial x_2}$.

Подставляя (4) в (2), определим общее уравнение Гельмгольца *EH*- волны для регулярного обобщенного гиротропного волновода с ортогонально-криволинейными формами поперечного сечения при нормальном намагничивании, учитывающие тепловые потери, относительно продольных компонент напряженностей электрического и магнитного полей

$$\Delta_{11}E_Z + \frac{b^2}{a^2}\Delta_{22}E_Z + b^2 E_Z = \frac{\gamma}{\omega\varepsilon'}\left(\frac{b^2 - a^2}{a^2}\right)\Delta_{12}H_z - \omega m\delta_1 H_z \tag{6}$$

Уравнения (5) и (6) позволяют перейти к частным уравнениям Гельмгольца для регулярных гиротропных волноводов с конкретными ортогонально-криволинейными формами поперечного сечения.

Частные уравнения Гельмгольца *HE*- и *EH*- электромагнитной волн, учитывающие тепловые потери, для нормально намагниченного прямоугольного гиротропного волновода

В декартовой системе координат коэффициенты Ламэ, символы Кристоффеля, дифференциальные операторы 1-го и 2-го порядков принимают вид

$$
\begin{cases}
h_1 = h_2 = h_3 = 1; \\
\varGamma_{11}^1 = \varGamma_{12}^1 = \varGamma_{21}^2 = \varGamma_{22}^2 = 0; \\
x_1 = x; \quad x_2 = y; \\
\nabla_1 = \dfrac{1}{h_1}\dfrac{\partial}{\partial x_1} = \dfrac{\partial}{\partial x}; \quad \nabla_2 = \dfrac{1}{h_2}\dfrac{\partial}{\partial x_2} = \dfrac{\partial}{\partial y}; \\
\delta_1 = \dfrac{1}{h_1}\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1} + \varGamma_{21}^2\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}; \quad \delta_2 = \dfrac{1}{h_2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x_2} + \varGamma_{12}^1\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}; \\
\Delta_{11} = \delta_1\nabla_1 = \dfrac{1}{h_1^2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1} + \varGamma_{21}^2 - \varGamma_{11}^1\right)\dfrac{\partial}{\partial x_1} = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}; \\
\Delta_{22} = \delta_2\nabla_2 = \dfrac{1}{h_2^2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x_2} + \varGamma_{12}^1 - \varGamma_{22}^2\right)\dfrac{\partial}{\partial x_2} = \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}; \\
\Delta_{12} = \dfrac{1}{h_1 h_2}\dfrac{\partial}{\partial x_1}\dfrac{\partial}{\partial x_2} = \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y}.
\end{cases} \tag{7}
$$

Тогда подставляя (7) в общее уравнение Гельмгольца (5) получим частное уравнение Гельмгольца *HE*- волны для нормально намагниченного прямоугольного гиротропного волновода с учетом тепловых потерь

$$
\frac{\mu_{\parallel}}{\mu}\frac{b^2}{a^2}\frac{\partial^2 H_Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_Z}{\partial y^2} + c^2 H_z = \left(\frac{b^2 - a^2}{a^2}\right)\frac{\gamma}{\omega\mu}\frac{\partial^2 E_Z}{\partial x \partial y} + \frac{\omega\varepsilon' m}{\mu}\frac{\partial E_Z}{\partial x}. \tag{8}
$$

Подставив (7) в общее уравнение Гельмгольца (6) получим частное уравнение Гельмгольца *EH*- волны для нормально намагниченного прямоугольного гиротропного волновода с учетом тепловых потерь

$$
\frac{\partial^2 E_Z}{\partial x^2} + \frac{b^2}{a^2}\frac{\partial^2 E_Z}{\partial y^2} + b^2 E_Z = \frac{\gamma}{\omega\varepsilon'}\left(\frac{b^2 - a^2}{a^2}\right)\frac{\partial^2 H_Z}{\partial x \partial y} - \omega m \frac{\partial H_Z}{\partial x}. \tag{9}
$$

Частные уравнения Гельмгольца *HE*- и *EH*- электромагнитной волн, учитывающие тепловые потери, для нормально намагниченного круглого гиротропного волновода

В цилиндрической системе координат коэффициенты Ламэ, символы Кристоффеля, дифференциальные операторы 1-го и 2-го порядков имеют вид

$$
\begin{cases}
h_1 = h_3 = 1; h_2 = r; \\
\varGamma_{11}^1 = \varGamma_{12}^1 = \varGamma_{22}^2 = 0; \varGamma_{21}^2 = \dfrac{1}{r}; \\
x_1 = r; x_2 = \varphi; \\
\nabla_1 = \dfrac{1}{h_1}\dfrac{\partial}{\partial x_1} = \dfrac{\partial}{\partial r}; \nabla_2 = \dfrac{1}{h_2}\dfrac{\partial}{\partial x_2} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \varphi}; \\
\delta_1 = \dfrac{1}{h_1}\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1} + \varGamma_{21}^2\right) = \dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{1}{r}; \delta_2 = \dfrac{1}{h_2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x_2} + \varGamma_{12}^1\right) = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \varphi}; \\
\Delta_{11} = \delta_1\nabla_1 = \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}; \Delta_{22} = \delta_2\nabla_2 = \dfrac{\partial}{\partial r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial \varphi^2}; \\
\Delta_{12} = \dfrac{1}{h_1 h_2}\dfrac{\partial}{\partial x_1}\dfrac{\partial}{\partial x_2} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi}.
\end{cases} \tag{10}
$$

Подставляя (10), в общее уравнение Гельмгольца (5), получим частное уравнение Гельмгольца *HE*- волны для нормально намагниченного круглого гиротропного волновода с учетом тепловых потерь

$$\frac{\mu_{\|}}{\mu}\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\right)\frac{\partial H_Z}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 H_Z}{\partial\varphi^2}+c^2 H_z=\left(\frac{b^2-a^2}{a^2}\right)\frac{\gamma}{\omega\mu}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 E_z}{\partial r\partial\varphi}+\frac{\omega\varepsilon' m}{\mu}\frac{\partial E_z}{\partial r} \qquad (11)$$

Подставляя (10), в общее уравнение Гельмгольца (6), получим частное уравнение Гельмгольца *EH*- волны для нормально намагниченного круглого гиротропного волновода с учетом тепловых потерь

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\right)\frac{\partial E_Z}{\partial r}+\frac{b^2}{a^2}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 E_Z}{\partial\varphi^2}+b^2 E_Z=\left(\frac{1}{r}\frac{\gamma}{\omega\varepsilon'}\frac{b^2-a^2}{a^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}-\omega m\right)\frac{\partial H_z}{\partial r}-\frac{1}{r}\omega m H_z \qquad (12)$$

Частные уравнения Гельмгольца *HE*- и *EH*- электромагнитной волн, учитывающие тепловые потери, для нормально намагниченного эллиптического гиротропного волновода

В эллиптической системе координат коэффициенты Ламэ, символы Кристоффеля, дифференциальные операторы 1-го и 2-го порядков имеют вид

$$\begin{cases} h_1=h_2=ed;\quad h_3=1;\\ \Gamma_{11}^1=\Gamma_{21}^2=\dfrac{sh2\xi}{2d^2};\Gamma_{12}^1=\Gamma_{22}^2=\dfrac{\sin(2\varphi)}{2d^2};\\ x_1=\xi;\quad x_2=\varphi;\\ \nabla_1=\dfrac{1}{h_1}\dfrac{\partial}{\partial x_1}=\dfrac{1}{ed}\dfrac{\partial}{\partial\xi};\ \ \nabla_2=\dfrac{1}{h_2}\dfrac{\partial}{\partial x_2}=\dfrac{1}{ed}\dfrac{\partial}{\partial\varphi};\\ \delta_1=\dfrac{1}{h_1}\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}+\Gamma_{21}^2\right)=\dfrac{1}{ed}\left(\dfrac{\partial}{\partial\xi}+\dfrac{sh2\xi}{2d^2}\right);\ \ \delta_2=\dfrac{1}{h_2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x_2}+\Gamma_{12}^1\right)=\dfrac{1}{ed}\left(\dfrac{\partial}{\partial\varphi}+\dfrac{\sin(2\varphi)}{2d^2}\right);\\ \Delta_{11}=\delta_1\nabla_1=\dfrac{1}{h_1^2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}+\Gamma_{21}^2-\Gamma_{11}^1\right)\dfrac{\partial}{\partial x_1}=\dfrac{1}{e^2d^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\xi^2};\\ \Delta_{22}=\delta_2\nabla_2=\dfrac{1}{h_2^2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x_2}+\Gamma_{12}^1-\Gamma_{22}^2\right)\dfrac{\partial}{\partial x_2}=\dfrac{1}{e^2d^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2};\\ \Delta_{12}=\dfrac{1}{h_1h_2}\dfrac{\partial}{\partial x_1}\dfrac{\partial}{\partial x_2}=\dfrac{1}{e^2d^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\xi\partial\varphi}, \end{cases} \qquad (13)$$

где e - фокусное расстояние эллипса; $d^2=ch^2\xi-\cos^2\varphi$.

Подставляя (13), в общее уравнение Гельмгольца (5) с последующим умножением полученного результата на e^2d^2, получим частное уравнение Гельмгольца *HE*- волны для нормально намагниченного эллиптического гиротропного волновода с учетом тепловых потерь

$$\begin{aligned}&\frac{\mu_{\|}}{\mu}\frac{b^2}{a^2}\frac{\partial^2 H_Z}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 H_Z}{\partial\varphi^2}+e^2d^2\left(c^2+\frac{m}{\mu}\gamma\frac{\sin(2\varphi)}{2ed^3}\right)H_z=\\ &=\left(\frac{b^2-a^2}{a^2}\right)\frac{\gamma}{\omega\mu}\frac{\partial^2 E_z}{\partial\xi\partial\varphi}+ed\frac{\omega\varepsilon' m}{\mu}\frac{\partial E_z}{\partial\xi}\end{aligned} \qquad (14)$$

Подставляя (13), в общее уравнение Гельмгольца (6) с последующим умножением полученного результата на e^2d^2, получим частные уравнения Гельмгольца *EH*- волны для нормально намагниченных эллиптических гиротропных волноводов с учетом тепловых потерь

$$\frac{\partial^2 E_Z}{\partial \xi^2} + \frac{b^2}{a^2}\frac{\partial^2 E_Z}{\partial \varphi^2} E_Z + b^2e^2d^2E_Z = \frac{\gamma}{\omega\varepsilon'}\left(\frac{b^2-a^2}{a^2}\right)\frac{\partial^2 H_Z}{\partial\xi\partial\varphi}H_z - \omega med\left(\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{sh2\xi}{2d^2}\right)H_z. \quad (15)$$

Заключение

Из общих формул (1) и (2) получены общие уравнения Гельмгольца гибридных *HE*- (5) и *EH*- электромагнитных волн (6) для регулярных гиротропных волноводов с ортогонально-криволинейными формами поперечного сечения при нормальном намагничивании с учетом тепловых потерь, из которых определены частные уравнения Гельмгольца для нормально намагниченных гиротропных волноводов с конкретными формами поперечного сечения, учитывающие тепловые потери:

1. Частные уравнения Гельмгольца гибридных *HE*- (8) и *EH*- электромагнитных волн (9) для прямоугольного гиротропного волновода;
2. Частные уравнения Гельмгольца гибридных *HE*- (11) и *EH*- электромагнитных волн (12) для круглого гиротропного волновода;
3. Частные уравнения Гельмгольца гибридных *HE*- (14) и *EH*- электромагнитной волн (15) для эллиптического гиротропного волновода.

Литература

1. Özgür Ü., Alivov Y., Morkoç H. Microwave ferrites, part 1: fundamental properties. Journal of Materials Science: Materials in Electronics // 2009. 20(9). P. 789–834. DOI:10.1007/s10854-009-9923-2.

2. Harris V. G. Modern Microwave Ferrites. IEEE Transactions on Magnetics // 2012. 48(3). P. 1075–1104. DOI:10.1109/tmag.2011.2180732.

3. Устинов А., Кочемасов В., Хасьянова Е. Ферритовые материалы для устройств СВЧ-электроники. Основные критерии выбора // Электроника: наука, технология, бизнес. 2015. №8. С. 86 – 92.

4. Сул Г., Уокер Л. Вопросы волноводного распространения электромагнитных волн в гиротропных средах. Пер. с англ. 1955. 192 с.

5. Лакс Б., Баттон К. Сверхвысокочастотные ферриты и ферримагнетики. Пер. с англ. // М.: Мир, 1965. 676 с.

6. Гуревич А. Г. , Мелков Г.А. Магнитные колебания и волны // М.: Физматлит. 1994. 464 с.

7. Неганов В.А., Нефедов Е.И., Яровой Г.П. Современные методы проектирования линий передач и резонаторов сверх- и крайневысоких частот // М.: Педагогика-Пресс. 1998. 328 с.

8. Итигилов Г. Б., Ширапов Д.Ш., Кравченко В.А. Общие и частные уравнения Гельмгольца гиротропных волноводов при нормальном намагничивании с учетом тепловых потерь // Материалы Всероссийской открытой научной конференции «Современные проблемы дистанционного зондирования, радиолокации, распространения и дифракции волн». г. Муром. 25–27 июня 2024 года. С. 113-122. DOI 10.24412/2304-0297-2024-1-113-122.