

Численные методы решения стационарных объемных интегральных уравнений Фредгольма второго рода для задач распространения и рассеяния электромагнитных волн

А.Б. Самохин¹, И.А. Юрченков¹

¹ Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "МИРЭА - Российский технологический университет",
119454 г. Москва, проспект Вернадского, дом 78.

E-mail: samokhin@mirea.ru

E-mail: yurchenkov@mirea.ru

В статье рассматриваются объемные сингулярные интегральные уравнения, описывающие задачи низкочастотного рассеяния электромагнитных волн в ограниченных трехмерных анизотропных структурах. Изучается спектр интегральных операторов. В явном виде представлена область расположения спектра оператора на комплексной плоскости для низкочастотного случая. Описывается обобщенный метод простой итерации для применения которого необходимо знание области расположения спектра оператора на комплексной плоскости. Для дискретизации интегральных уравнений применяется метод коллокации на равномерной сетке. Это позволяет, используя быстрое дискретное преобразование Фурье, построить алгоритм быстрого умножения матрицы системы линейных уравнений на вектор. Приводятся результаты численного решения рассматриваемых задач.

Ключевые слова: интегральное уравнение Фредгольма, быстрое преобразование Фурье, итерационный метод, объемные сингулярные интегральные уравнения, СЛАУ, операторные уравнения.

Numerical methods for solving stationary volume Fredholm integral equations of the second kind for problems of electromagnetic wave propagation and scattering propagation and scattering of electromagnetic waves

A.B. Samokhin¹, I.A. Yurchenkov¹

¹ RTU MIREA.

The paper deals with volume singular integral equations describing the problems of low-frequency scattering of electromagnetic waves in bounded three-dimensional anisotropic structures. The spectrum of integral operators is studied. The domain of the operator spectrum on the complex plane for the low-frequency case is presented explicitly. The generalized method of simple iteration is described, for application of which it is necessary to know the area of the operator spectrum on the complex plane. The collocation method on a uniform grid is used to discretize the integral equations. This allows, using a fast discrete Fourier transform, to construct an algorithm for fast multiplication of the matrix of a system of linear equations by a vector. The results of numerical solution of the considered problems are given.

Keywords: Fredholm integral equation, fast Fourier transform, iterative method, volume singular integral equations, SLE, operator equations.

Введение

В статье рассматриваются объемные сингулярные интегральные уравнения, описывающие задачи рассеяния электромагнитных волн в ограниченных трехмерных диэлектрических анизотропных структурах. Для решения рассматриваемых интегральных уравнений можно использовать только численные методы. Тогда,

интегральные уравнения должны быть аппроксимированы системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). При этом, размерность матрицы СЛАУ, как правило, очень велика. Основными критериями эффективности вычислительного алгоритма решения СЛАУ являются: число арифметических операций T для решения с заданной точностью и объём требуемой памяти M при реализации алгоритма. Для большинства реальных задач, использование прямых методов решения СЛАУ, практически невозможно, так как приводит к непомерным вычислительным затратам. При использовании итерационных методов, указанные критерии эффективности описываются следующими формулами:

$$M \sim M_A, \quad T \sim LT_A, \quad (1)$$

где M_A – количество элементов массива чисел, которые необходимы для алгоритма умножения матрицы СЛАУ на вектор;

L – количество итераций для получения решения с заданной точностью;

T_A – число арифметических операций для умножения матрицы СЛАУ на вектор.

Для плотных матриц произвольного вида $M_A = N^2$, $T_A \sim N^2$. Однако, для плотных матриц, обладающих определенными свойствами, эти величины могут быть значительно меньше. Нашей целью, при построении вычислительных алгоритмов, является минимизация величин L и T_A .

В работе будем рассматривать задачи рассеяния, в которых диаметр области неоднородности (диаметром области называется максимальное расстояние между точками границы) значительно меньше длины волны электромагнитного поля. Тогда, в явном виде можно описать область расположения спектра оператора интегрального уравнения на комплексной плоскости [1, 2]. Поэтому, для численного решения задачи можно использовать обобщенный метод простой итерации, который имеет в этом случае хорошую сходимость. Для дискретизации рассматриваемых интегральных уравнений будем использовать метод коллокации на равномерной сетке. Тогда матрица получившейся СЛАУ будет иметь структуру близкую к Теплицевой. Далее, используя алгоритмы дискретного преобразования Фурье, получим значение T_A практически пропорциональным размерности матрицы СЛАУ. Численные результаты подтверждают эффективность предлагаемых вычислительных алгоритмов.

Математическая формулировка задачи

Будем рассматривать следующий класс задач электродинамики. В конечной трехмерной области Q среда характеризуется тензор функцией диэлектрической проницаемости $\hat{\epsilon}$. Вне Q диэлектрическая проницаемость постоянна и изотропна, т.е. $\epsilon = \epsilon_0 = const$ и везде $\mu = \mu_0 = const$. Требуется определить электромагнитное поле, возбуждаемое в данной среде внешним полем \vec{E}^0 с временной зависимостью в виде множителя $exp(-i\omega t)$. Соответствующая математическая задача формулируется следующим образом: найти векторные функции \vec{E} и \vec{H} , удовлетворяющие условию излучения на бесконечности и уравнениям Максвелла:

$$rot \vec{H} = -i\omega \epsilon \vec{E} + \vec{J}_E^0, \quad rot \vec{E} = i\omega \mu_0 \vec{H} - \vec{J}_H^0, \quad (2)$$

где \vec{J}_E^0, \vec{J}_H^0 – внешние токи, порождающие внешнее поле \vec{E}^0 .

Поставленная задача может быть сведена к объёмному сингулярному интегральному уравнению относительно электрического поля \vec{E} в области неоднородности Q [1, 3]:

$$\vec{E}(x) + \frac{1}{3}(\hat{\epsilon}_r(x) - \hat{I})\vec{E}(x) - p.v. \int_Q ((\hat{\epsilon}_r(y) - \hat{I})\vec{E}(y), grad) grad G(R) dy - \\ - k_0^2 \int_Q (\hat{\epsilon}_r(y) - \hat{I})\vec{E}(y) G(R) dy = \vec{E}^0(x), \quad x \in Q, \quad (3)$$

где $p. v.$ – интеграл за вычетом бесконечно малого шара в окрестности точки $y = x$ [4];
 $G(R)$ – функция Грина для уравнения Гельмгольца:
 $G(R) = \exp(ikR)/(4\pi R)$; $R = |x - y|$; $x = (x_1, x_2, x_3)$; $y = (y_1, y_2, y_3)$;
 $\hat{\varepsilon}_r = \hat{\varepsilon} / \varepsilon_0$; $k_0 = \omega(\varepsilon_0 \mu_0)^{0.5}$. (4)

Обобщенный метод простой итерации

Для численного решения задач низкочастотного рассеяния электромагнитных волн будем использовать обобщенный метод простой итерации [1, 3]. Опишем этот метод.

В банаховом пространстве E будем рассматривать линейное операторное уравнение:

$$\hat{A}u = f, \quad (5)$$

где \hat{A} – ограниченный, а значит и непрерывный оператор;
 f – внешняя функция-элемент банахова пространства;
 u – неизвестная, в общем смысле, функция.

Запишем уравнение (5) в эквивалентном виде:

$$u - \hat{B}_\mu u = \frac{f}{\mu}, \quad (6)$$

где \hat{B}_μ – линейный оператор, задаваемый формулой:

$$\hat{B}_\mu = \frac{(\mu \hat{I} - \hat{A})}{\mu}, \quad (7)$$

где $\mu \neq 0$ – произвольное комплексное число.

Теорема 1. *Линейное операторное уравнение $u - \hat{B}u = f$ имеет единственное решение при любом $f \in E$ и последовательные приближения:*

$$u_{n+1} = \hat{B}u_n + f, \quad n = 0, 1, \dots \quad (8)$$

сходятся к решению при любом начальном приближении $u_0 \in E$, если спектральный радиус оператора $\rho_0(\hat{B}) < 1$. При этом для сходимости итераций справедлива оценка:

$$\|u_n - u\| \leq C[\rho_0(\hat{B})]^n, \quad C = \text{const}. \quad (9)$$

Из теоремы 1 следует, что последовательные приближения:

$$u_{n+1} = \hat{B}_\mu u_n + f/\mu, \quad n = 0, 1, \dots \quad (10)$$

сходятся к решению (6), а значит и (5), при любых $u_0, f \in E$, если спектральный радиус оператора \hat{B}_μ меньше единицы, т.е.:

$$\rho_0(\mu) = \sup|\eta(\mu)| < 1, \quad \eta(\mu) \in \sigma(\hat{B}_\mu), \quad (11)$$

где $\sigma(\hat{B})$ – спектральное множество оператора \hat{B} на комплексной плоскости.

Из (7) ясно, что итерации (10) можно представить в следующем виде:

$$u_{n+1} = u_n - \frac{1}{\mu}(\hat{A}u_n - f), \quad n = 0, 1, \dots \quad (12)$$

Нашей дальнейшей целью будет нахождение ответа на вопрос: при каком расположении спектра исходного оператора \hat{A} на комплексной плоскости можно указать такие комплексные числа μ , при которых итерации (12) сходятся к решению (5).

Проводя соответствующие выкладки [1] получим значение μ_0 для произвольного прямолинейного отрезка, не содержащего начало координат:

$$\mu_0 = \frac{z_1 + z_2}{2} + \frac{i[Im(z_1 \bar{z}_2)(z_2 - z_1)]}{2[|z_1 \bar{z}_2| + Re(z_1 \bar{z}_2)]}, \quad (13)$$

где $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ – точки на комплексной плоскости, обозначающие концы отрезка и являющиеся точками спектра оператора.

Заметим, что геометрически точка μ_0 является точкой пересечения срединного перпендикуляра к заданному отрезку и окружности, проходящей через концы отрезка и

начало координат. Радиус построенного круга S_0 с центром в точке μ_0 определяется формулой:

$$R_0^2 = \frac{|z_1 - z_2|^2 |\bar{z}_1 z_2|}{2[|\bar{z}_1 z_2| + \operatorname{Re}(\bar{z}_1 z_2)]}. \quad (14)$$

Приведем также значение μ_0 для произвольного треугольника, не содержащего начало координат:

$$\mu_0 = 1i \cdot \frac{|\lambda_1|^2 \cdot (\lambda_2 - \lambda_3) + |\lambda_2|^2 \cdot (\lambda_3 - \lambda_1) + |\lambda_3|^2 \cdot (\lambda_1 - \lambda_2)}{2 \cdot \operatorname{Im}(\lambda_1 \cdot \bar{\lambda}_2 + \lambda_2 \cdot \bar{\lambda}_3 + \lambda_3 \cdot \bar{\lambda}_1)}. \quad (15)$$

Пусть выпуклая оболочка спектра – произвольный выпуклый n -угольник на комплексной плоскости, что с практической точки зрения не ограничивает общность. Геометрически несложно показать, что, по крайней мере, две вершины многоугольника должны находиться на границе круга S_0 .

Для выпуклого многоугольника с числом вершин n опишем конечный алгоритм нахождения искомого круга S_0 , а значит и наилучшего итерационного параметра μ_0 .

Шаг А. Число всех отрезков, соединяющих вершины многоугольника, будет равно $n(n-1)/2$. Последовательно рассматриваем эти отрезки и для каждого из них строим наилучший круг S_0 . Если для какого-либо отрезка окажется, что построенный круг содержит весь многоугольник, то это будет искомым кругом и алгоритм заканчивается. Если ни один построенный круг не содержит весь многоугольник, то переходим к пункту В.

Шаг В. Искомый круг S_0 будет проходить через три вершины многоугольника. Число всех возможных треугольников, построенных на вершинах n -угольника, равно $n(n-1)(n-2)/6$. Искомый круг S_0 будет описанным кругом вокруг одного или нескольких треугольников. Последовательно рассматриваем все треугольники и для тех описанных окружностей, которые содержат весь многоугольник и не содержат начало координат, вычисляем углы, под которыми они видны из начала координат. Выбираем круг, который виден под наименьшим углом. Алгоритм заканчивается.

Метод коллокации и оценка эффективности

Перейдем к дискретизации интегрального уравнения (3), то есть аппроксимации уравнения СЛАУ [5]. В прямоугольной декартовой системе координат определим параллелепипед Π , внутри которого находится область Q . Ребра параллелепипеда параллельны осям координат, а длины ребер равны $N_l h_l$, $l = 1, 2, 3$, где h_l – шаги сетки по декартовым координатам.

Тогда параллелепипед Π можно представить как объединение ячеек (элементарных параллелепипедов) $\Pi(p)$, $p = (p_1, p_2, p_3)$, $p_l = 0, \dots, N_l - 1$. Определим область \tilde{Q} как объединение N_Q ячеек, центры которых лежат внутри области Q . Узловые точки, в которых определяются значения функций, будем задавать в центрах ячеек и обозначать как $x(p)$, а значения функций в этих точках как $f(p)$.

Интегральное уравнение (3) будем аппроксимировать СЛАУ размерности $\sim N_Q$ относительно значений неизвестного поля $u(p)$ в узловых точках области Q :

$$u(p) - \sum_{y(q) \in Q} B(p-q) \eta(q) u(q) = u_0(p), \quad x(p) \in Q, \quad (16)$$

$$u(p) \equiv u(x(p)); \quad u_0(p) = u_0(x(p)); \quad u(q) \equiv u(y(q)).$$

Поскольку узловые точки находятся в центре ячеек, точность аппроксимации интегрального оператора $\sim h^2$, $h = \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}$.

В (16) $u(p)$ и $u_0(p)$ – векторы, а $B(p-q)$ и $\eta(q)$ – матрицы размерности три, которые определяются формулами:

$$\eta_{mk}(q) = \varepsilon(y(q)) - \delta_{mk}, \quad R = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (y_i - x_i(p))^2}, \quad \alpha_n = \frac{x_n(p) - y_n}{|x(p) - y|}, \quad n = 1, 2, 3.$$

$$B_{nm}(p - q) = \int_{\Pi_q} G(R) \left[\left(\frac{3}{R^2} - \frac{3ik_0}{R} - k_0^2 \right) \alpha_n \alpha_m + \left(k_0^2 + \frac{ik_0}{R} - \frac{1}{R^2} \right) \delta_{nm} \right] dy, \quad p \neq q. \quad (17)$$

Для кубической равномерной сетки значение $B_{nm}(0,0,0)$, определяется формулой $B_{nm}(0,0,0) = -(1/3)I$, I – единичная матрица.

Из (16) следует, что основные вычислительные затраты при умножении матрицы СЛАУ на вектор (выполнение одной итерации) связаны с вычислением сумм вида:

$$W(p) = \sum_{y(q) \in Q} B(p - q)V(q), \quad x(p) \in Q. \quad (18)$$

Для вычисления $W(p)$ в узловых точках $x(p) \in Q$ требуется выполнить $\sim N_Q^2$ арифметических операций, где N_Q^2 – число узловых точек в области Q . Для уменьшения числа арифметических операций будем применять технику быстрого умножения теплицевых матриц на вектор [6,7].

Таким образом, для выполнения одной итерации при решении СЛАУ (16) необходимо выполнить быстрое прямое преобразование Фурье функции $V(p_1, p_2, p_3)$ по каждой переменной и обратное преобразование Фурье функции $W^F(k_1, k_2, k_3)$ (преобразование функции $B^F(k_1, k_2, k_3)$ выполняется один раз до начала итерационной процедуры). Число арифметических операций и объем требуемой памяти для выполнения одной итерации оценивается формулами:

$$T_A \sim N \log(N), \quad M_A \sim N, \quad N = N_1 N_2 N_3, \quad (19)$$

где $\log(N)$ – целочисленный логарифм, то есть, сумма всех простых делителей числа N .

При выборе шагов сетки и значений N_1, N_2, N_3 необходимо руководствоваться следующими критериями: во-первых, в пределах ячеек искомая функция мало меняется; во-вторых, область \tilde{Q} , состоящая из ячеек, центры которых находятся внутри Q , достаточно хорошо описывают Q .

Согласно (1), другим важным критерием эффективности алгоритма, помимо значения T_A , является число итераций L , которое требуется для получения решения с заданной точностью. В качестве примера определения L рассмотрим значения L для низкочастотного рассеяния [8] на однородном анизотропном кристалле. Тензор диэлектрической проницаемости такого тела в декартовой системе координат, оси которых параллельны главным осям кристалла представим, например, в виде $\varepsilon_{11} = 5$, $\varepsilon_2 = 3$, $\varepsilon_{33} = 2$, а остальные компоненты тензора равны нулю. Тогда, согласно теореме 2, весь спектр оператора уравнения 3 лежит вблизи отрезка [1,9] на действительной оси комплексной плоскости. В этом случае, итерационный параметр для обобщенного метода простой итерации $\mu_0 = 3$. Тогда итерации (12) при $\mu = \mu_0 = 3$ будут сходиться к решению уравнения со скоростью геометрической прогрессии, знаменатель которой $\rho_0 = 2/3$. При значении числа итераций $L = 40$ невязка решения задачи уменьшится в более чем в миллион раз. Этот пример показывает эффективность использования обобщенного метода простой итерации для решения задач низкочастотного рассеяния.

Численные результаты

При проведении численных экспериментов для демонстрации возможностей предложенного подхода были рассмотрены два сценария исходной постановки задачи (3).

Первый сценарий рассматривает качество решения исходной задачи при неизменных физических параметрах (линейный размер объемной области решения $l_n = 1, n = 1, 2, 3$, волновое число $k_0 = 1$) с изменением параметра степени дискретизации задачи N_Q в пределах от 10^4 до 10^6 разбиений. Будет рассмотрено качество решения задачи (18) и сходимость итераций при изменении дискретизации области решения как в случае постановки задачи с затуханием в среде, то есть при комплексных значениях коэффициентов тензора диэлектрической проницаемости $\hat{\epsilon} \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$, так и без затухания, то есть с вещественным тензором $\hat{\epsilon} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ в обоих случаях постоянным, для простоты, на всей объемной области решения [10].

В качестве функции внешнего излучения возьмем модель плоской волны, распространяемой вдоль одной координаты $\vec{E}^0(x) = f = (\exp(ikx_1), 0, 0)$.

В рамках данного сравнительного моделирования обозначим критерий останова в виде метрики d для итерационного метода (12):

$$\frac{\|u_{n+1} - u_n\|}{\|f\|} = d, \quad d \leq 10^{-5}. \quad (20)$$

Данная метрика отслеживается в процессе итерационного метода (12), ограничивая число итераций вплоть до достижения заранее заданной точности приближенного решения. Также для итерационного метода возможно ограничивать сверху максимальное число итераций в качестве гиперпараметра метода.

Построим по результатам тестового моделирования задачи с диэлектрической проницаемостью среды $\hat{\epsilon}_{11} = 5 + i3, \hat{\epsilon}_{22} = 3 + i2, \hat{\epsilon}_{33} = 2 + i1$ график сходимости итераций (рис.1) по метрике d (20) в зависимости от числа итераций. Моделирование производилось при различных значениях дискретизации $N_Q = 27000$ и $N_Q = 10^6$ объемной области решения.

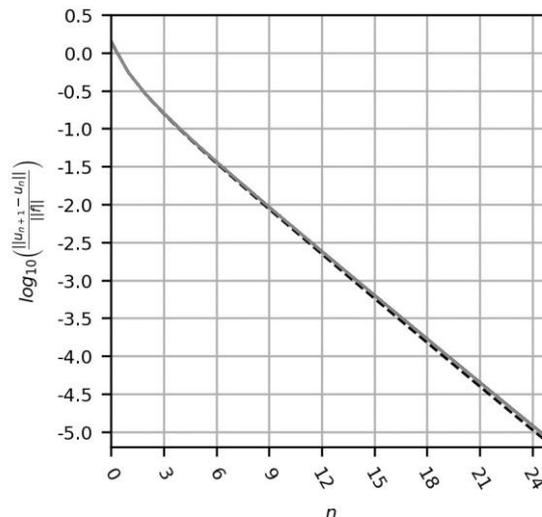


Рис. 1. График сходимости итераций

На графике (рис.1), приведенном выше, показаны две кривые зависимости метрики d (20) от количества итераций решения. Первая, сплошная кривая показывает сходимость итераций при $N_Q = 27000$, вторая штриховая при $N_Q = 10^6$. График сходимости демонстрирует стабильное изменение ключевой метрики итерационного метода и равномерную сходимость, как и заявлено с одним основанием геометрической прогрессии ρ_0 . По оси ординат была выбрана логарифмическая шкала с основанием 10

для более наглядной визуализации показательной сходимости итераций по метрике d (20).

Конечная полученная норма невязки для $N_l = 30$ равна $\|\hat{A}u_L - f\| = 7.486 \times 10^{-6}$, а для $N_l = 100$ равна $\|\hat{A}u_L - f\| = 6.529 \times 10^{-7}$, что показывает увеличение полученной конечной точности решения.

В результате решения поставленной задачи (3)-(4) на основе обобщенного метода простой итерации (12)-(15) получаем векторное поле приближенного решения $u_L \approx \vec{E}(x)$ в точках центров элементарных разбиений $x(p) \in Q$ исходного куба. Полученное решение в виде массива векторов возможно визуализировать в виде векторного поля направлений полученного приближения электрического поля на области решения задачи. Визуализируем векторное поле приближенного решения на срезе куба в центре по координате $x_3 = 0$. Представленные визуализации для различной степени дискретизации исходного области решения показывают проекцию векторов на плоскость $x_1 O x_2$.

На первой визуализации (рис.2.а) показано векторное поле приближенного решения при $N_Q = 27000$, то есть по 30 разбиений вдоль каждой оси x_1, x_2, x_3 при линейных размерах трехмерной области $l_n = 1, n = 1, 2, 3$ в точке с центром $c = (0, 0, 0)$. Параметр волнового числа равен $k_0 = 1$, диэлектрическая проницаемость задана диагональным тензором диэлектрической проницаемости со значениями на диагонали $\varepsilon_{11} = 5 + i3$, $\varepsilon_{22} = 3 + i2$, $\varepsilon_{33} = 2 + i1$.

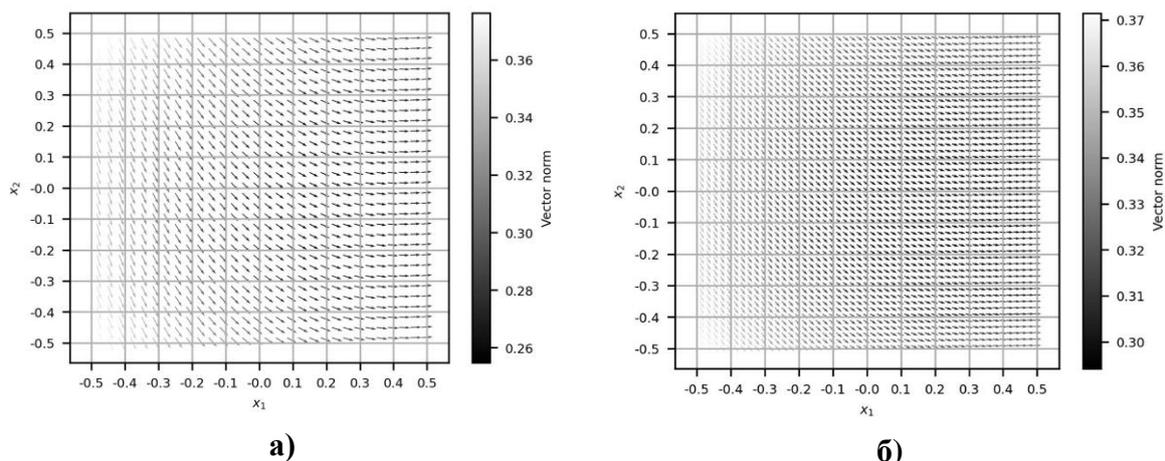


Рис. 2. Векторное поле найденного приближения: а) – $N_Q = 27000$ разбиений, б) – $N_Q = 125000$ разбиений

На второй визуализации (рис.2.б) показано векторное поле приближенного решения при $N_Q = 125000$, то есть по 50 разбиений вдоль каждой оси x_1, x_2, x_3 при тех же параметрах моделируемой задачи.

На визуализациях (рис.2), показанных выше, моделировался квазистатический случай излучения, в котором колебания излучения незначительны по сравнению с мощностью волны. На визуализациях видно, что при распространении волны в положительном направлении по оси x_1 произошло преломление волны и распространение также продолжилось с уменьшением нормы векторов векторного поля в точках центров элементарных разбиений. Показанные визуализации векторного поля полученного решения качественно воспроизводятся при увеличении дискретизации задачи и становятся менее доступными для восприятия.

Второй сценарий исследует зависимость сходимости итераций обобщенного итерационного метода в зависимости от значения параметра волнового числа k . Приводятся картины сходимости зависимости метрики относительной нормы разности приближений d (20) от числа итераций в каждом из предлагаемых точечных значений волнового числа. Картины сходимости исследуются на той же области решений, при $N_Q = 27000$, и значениями $k_0 = 0.25, 0.75, 1.25, 1.75, 2.25, 2.5, 2.75, 2.9$. На первом графике (рис.3.а) показана сходимость итераций для задачи с вещественным тензором $\hat{\epsilon}$.

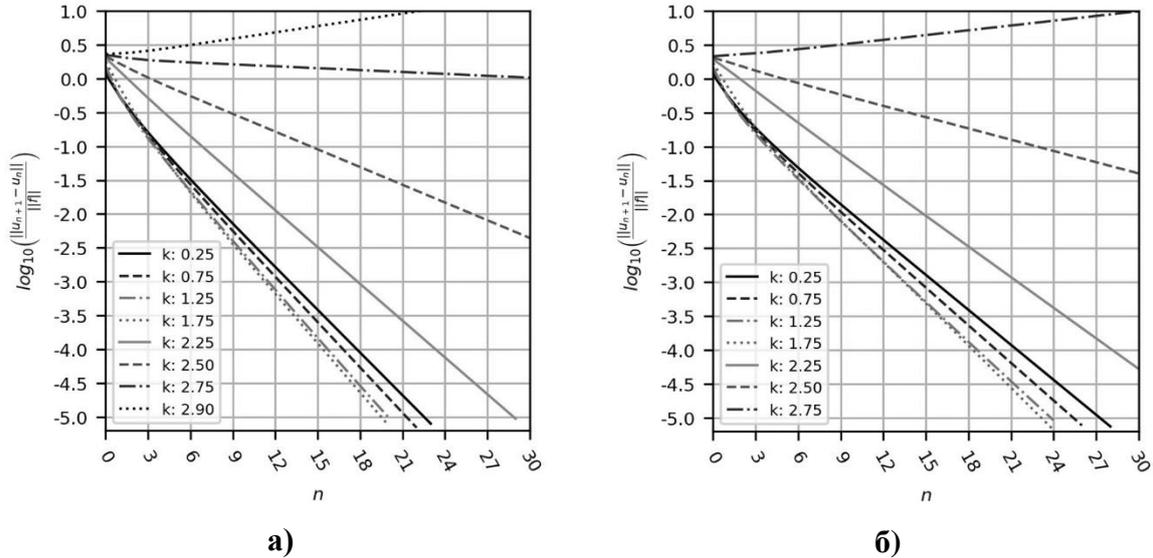


Рис. 3. График сходимости итераций: а) – для тензора $\hat{\epsilon}_r$ с действительными значениями, б) – с комплексными значениями

На графике сходимости (рис.3.а), показанном выше, заметим качественно отличающуюся картину сходимости итераций для одной и той же постановки задачи при увеличении параметра волнового числа k_0 . При увеличении параметра волнового числа скорость сходимости итераций, а именно количество итераций обобщенного метода простой итерации увеличивается для обеспечения требуемой точности $\|u_n - u_{n-1}\| / \|f\| < 10^{-5}$.

Из графика (рис.3.а) также заметим, что сходимость имеет экспоненциальный характер, что показано линеаризацией зависимости в полулогарифмической шкале. Скорость сходимости итераций при различных значениях параметра волнового числа k_0 отличается основанием показательной монотонно убывающей функции сходимости, как и было показано в (9).

Приведем также картину сходимости итераций (рис.3.б) при так же различных значениях волнового числа при для комплексного тензора $\hat{\epsilon}$.

Из графика (рис.3.б) видим, что для значений волнового числа в диапазоне $k_0 \leq 2.75$ картина сходимости является убывающей, что говорит о том, что задача в данном диапазоне значений параметра все еще является квазистатической, а также что спектр оператора лежит в границах окружности, образованной диагональными значениями тензора $\hat{\epsilon}$, или значение найденного итерационного параметра μ_0 все еще является подходящим для проведения итерационной процедуры, хоть и не оптимальным. Для значений волнового числа $k_0 < 2.25$ наблюдаем характер сходимости схожий с характером сходимости для эксперимента в первом сценарии (рис.1) для значения $k_0 = 1$. Для диапазона значений параметра $k_0 \in [2.25, 2.75]$ видим замедление темпов сходимости по метрике (20). Этот эффект может говорить о не оптимальном

выборе параметра или увеличивающемся с ростом значения k_0 радиусе выпуклой оболочки спектра оператора. При значении параметра $k_0 > 2.75$ моделирование при заданных линейных размерах $l_n, n = 1, 2, 3$ и значениях $\hat{\epsilon}$ невозможно.

С точки зрения изменения параметра l – линейных размеров моделируемой кубической области, при фиксированном значении k_0 , поведение картины сходимости методов будет совпадать с картиной изменения параметра волнового числа k_0 . При увеличении линейных размеров области спектр исходного оператора из (3) будет "расползаться" и при определенном значении l случай уже перестанет быть квазистатическим, в том плане что внешний источник излучения уже будет определенном смысле колебательным, а не монотонным.

Приведенные выше сценарии численных экспериментов показывают качественную картину эффективности работы предложенной численной схемы и итерационного метода в рамках решаемой задачи. При моделировании с помощью данной схемы так же доступен выбор большего числа элементарных разбиений, по сравнению с представленным в настоящей работе $N_0 \gg 10^6$.

Выводы

В работе рассматриваются объемные сингулярные интегральные уравнения, описывающие задачи низкочастотного рассеяния электромагнитных волн в ограниченных трехмерных анизотропных структурах. Изучается спектр интегральных операторов. В явном виде представлена область расположения спектра оператора на комплексной плоскости для низкочастотного случая. Описывается обобщенный метод простой итерации для применения которого необходимо знание области расположения спектра оператора на комплексной плоскости. Для дискретизации интегральных уравнений применяется метод коллокации на равномерной сетке. Это позволяет, используя быстрое дискретное преобразование Фурье, построить алгоритм быстрого умножения матрицы системы линейных уравнений на вектор. Приводятся результаты численного решения рассматриваемых задач, которые показывают эффективность построенных алгоритмов.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ (Российский научный фонд) №20-11-20087

Литература

1. Самохин А.Б. Объемные интегральные уравнения электродинамики. Техносфера, Москва, 2021.
2. Будко Н.В., Самохин А.Б., Самохин А.А. Обобщенный метод простой итерации для решения объемных сингулярных интегральных уравнений задач низкочастотного рассеяния // Дифференциальные уравнения, 2005, Т. 41, № 9, С. 1198–1202.
3. Самохин А.Б. Объемные сингулярные интегральные уравнения для задач рассеяния на трехмерных диэлектрических структурах // Дифференциальные уравнения, 2014, Т. 50, № 9, С. 1215-1230
4. Mikhlin S.G., Prosdorf S. Singular integral equations, Akademie-Verlag, New York, 1986.
5. Самохин А.Б., Самохина А.С., Шестопалов Ю.В. Методы дискретизации объемных сингулярных интегральных уравнений электромагнетизма // Дифференциальные уравнения, 2018, Т. 54, № 9, С. 1251-1261.
6. Самохин А.Б. Численные методы решения многомерных интегральных уравнений математической физики с ядрами, зависящими от разности аргументов // Радиотехника и электроника, 2005, Т. 50, № 2, С. 208-212.

7. Samokhin A.B. Iteration and Discretization Methods for Solving the Volume Integral Equations // IEEJ Transactions A (Fundamentals and Materials), 2009, V. 129, N. 10, PP. 669-774.
8. Приходько В.Ю., До Ву Минь Тханг Дифракция низкочастотных волн на упругих тонкостенных оболочках вращения // Russian Technological Journal. 2020; Т. 8, № 6, С. 157-166. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2020-8-6-157-166>
9. Budko N.V., Samokhin A.B. Transverse Electric Scattering on Inhomogeneous Objects: Spectrum of Integral Operator and Preconditioning // SIAM J. Sci. Comput., 2006, V. 28, N. 2, PP. 682-700.
10. Коваленко А.Н., Жуков А.Н. Алгебраические модели полосковых линий в многослойной диэлектрической среде // Russian Technological Journal. 2018; Т. 6, № 3, С. 54-71, <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2018-6-3-54-71>.