

Проекции лучевых и каустических структур в координатно-импульсных подпространствах предканонического оператора Маслова в ионосферной плазме

А.С. Крюковский, Д.С. Лукин, Ю.И. Скворцова

Автономная некоммерческая организация высшего образования «Российский новый университет», Москва, ул. Радио, 22, Kryukovsky@rambler.ru

Федеральное государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский физико-технический институт (государственный университет)» Московская область, г. Долгопрудный, Институтский пер., 9, luknet1@yandex.ru

Автономная некоммерческая организация высшего образования «Российский новый университет», Москва, ул. Радио, 22, Julia_bova@mail.ru

Сопоставлены проекции фазового пространства в двумерные подпространства, соответствующие различным картам канонического оператора Маслова, в невозмущенном и возмущенном случаях. Рассмотрены каустические особенности лучевых семейств в этих проекциях. Рассчитаны амплитудные множители вдоль лучей для разных карт и проанализированы сингулярности, связанные с касанием лучей каустик. В качестве возмущений ионосферного слоя F рассмотрены: слой E, спорадический слой и локальное эллиптическое возмущение в окрестности главного максимума. Показано, что канонические подпространства даже в невозмущенном случае содержат каустики, а введение возмущений существенно усложняет лучевую и каустическую картину. Сделан вывод об актуальности перехода от интегрального описания решения к волновой теории катастроф.

The projections of phase space in tow-dimension sub-space, appropriate to various cards of the canonical Maslov's operator, in non-disturbed and disturbed cases are compared. Caustic singularities of ray families in these projections are considered. The amplitude multipliers along rays for different cards are designed and singularities, connected with by a contact of rays of caustics are analyzed. As disturbances of ionospheric F-layer are considered: E-layer, sporadic layer and a local elliptic disturbance in a vicinity of the main maximum. Is shown, that canonical sub-spaces even in the non-disturbed case contain caustics, and a disturbance conducting essentially complicates ray and caustic pictures. The conclusion about a urgency of transition from the integrated description of the solution to the wave catastrophe theory is made.

Для математического моделирования амплитудно-фазовых структур электромагнитных полей в ионосфере Земли [1-4] в настоящее время активно применяется канонический оператор В.П. Маслова. В отличие от метода геометрической оптики [5-7], канонический оператор Маслова [8-10] позволяет получить равномерные асимптотические решения волновых уравнений не только в регулярных, но и в сингулярных областях, которым соответствуют каустики (оггибающие лучевых семейств) и их особенности – волновые катастрофы [11-19].

Работа посвящена исследованию лучевых и каустических структур в координатно-импульсных подпространствах предканонического оператора Маслова. Рассмотрены две ситуации: распространение в возмущенном и невозмущенном ионосферном слое.

В отличие от работ [7, 20-24], в которых на основе лучевых методов моделировалось распространение радиоволн в конфигурационном пространстве, в данной работе изучены особенности, возникающие при возмущении ионосферной плазмы в координатно-импульсных пространствах. Рассмотрена изотропная модель эффективной диэлектрической проницаемости ионосферы, то есть модель, не учитывающая магнитное поле Земли.

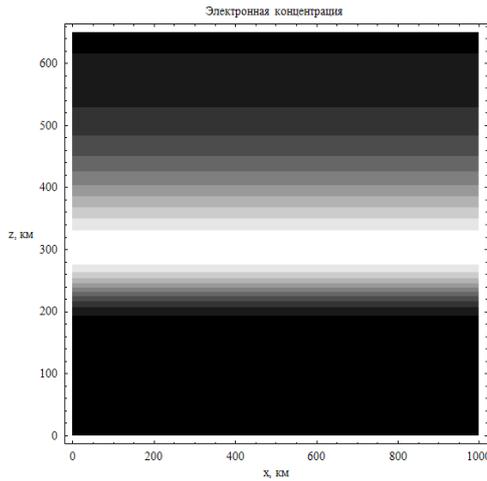


Рис. 1 а

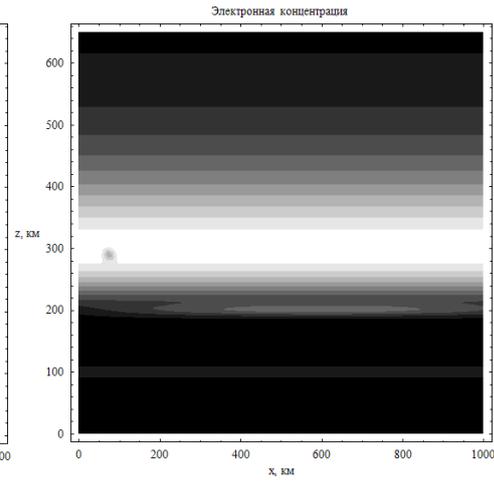


Рис. 1 б

На рис. 1а и б показаны линии равного уровня электронной концентрации ионосферной плазмы в невозмущенном (рис. 1 а) и в возмущенном случае. На рис. 1 б помимо слоя F2, представленного также и на рис. 1 а, мы видим слой E на высоте 100 км, спорадический слой на высоте 200 км и локальное возмущение (вызванное понижением электронной концентрации) эллиптической формы на высоте 290 км.

Для вычисления лучевых траекторий в фазовом пространстве координат и волновых векторов использована бихарактеристическая система уравнений [5-7,11].

Рассмотрим структуру лучевых траекторий в различных двумерных проекциях фазового пространства, сопоставляя невозмущенный и возмущенный случаи. На рис. 2 а показана лучевая структура радиосигнала в случае распространения волны в плоскости (x,z) в невозмущенном случае, а на рис. 2 б – такая же структура для возмущенного случая.

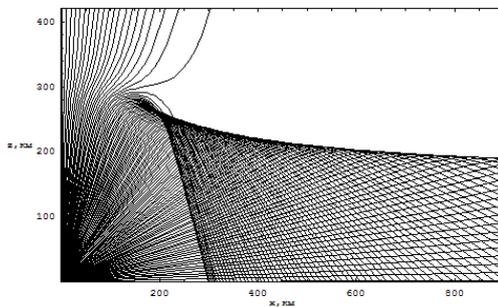


Рис. 2 а.

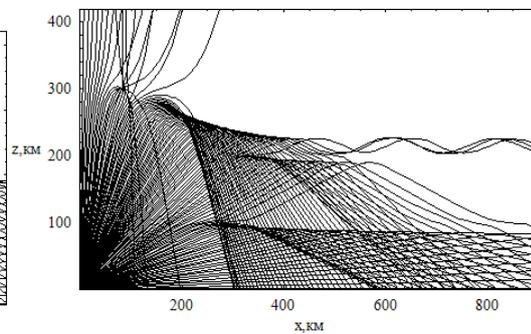


Рис. 2 б.

Анализируя рис. 2 б, видим, что с ростом угла выхода лучи сначала образуют каустическое остриё, связанное с нижним слоем E (см. рис. 1 б), затем возникает остриё, вызванное спорадическим слоем, и только потом образуется каустическое остриё слоя F.

Рассмотрим смешанные координатно-импульсные подпространства фазового пространства. Сначала изучим проекции бихарактеристик в плоскости $(x, k_z/k)$ (см. рис. 3 а и 3 б).

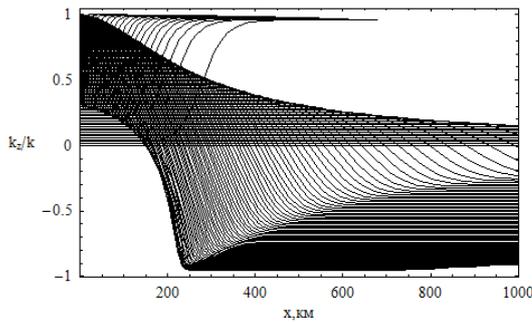


Рис. 3 а.

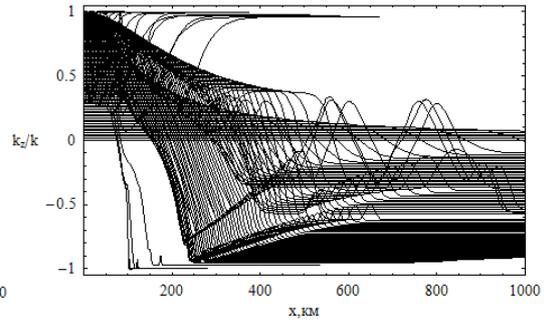


Рис. 3 б.

Лучевая структура в плоскости $(x, k_z/k)$; невозмущенный случай – рис. 3а; возмущенный случай – рис. 3 б.

На рис. 3 а все лучи выходят из точки с координатой $x=0$, но с разными волновыми векторами k_z . Луч с $\eta = 0$ идет строго горизонтально. Далее с увеличением начального значения k_z (и соответственно η) лучи на рис. 3 а поднимаются (относительно друг друга) и образуют верхнюю каустику, аналогичную верхней каустики рис. 2 а, но смещенную относительно неё. Отражаясь от ионосферного слоя, лучи выходят из плазмы и далее распространяются с постоянным k_z . В верхней части рисунка видны лучи, прошедшие ионосферный слой.

В возмущенном случае (рис. 3 б) лучевая картина качественно похожа на структуру рис. 3 а, но, в правой части рисунка мы наблюдаем сильные осцилляции, соответствующие распространению лучей в волновом канале и прерывающие каустику. Кроме того, имеют место и более слабые осцилляции, соответствующие внутренним каустическим структурам рис. 2 б. Также следует отметить почти вертикальные лучи, не прошедшие ионосферного слоя и опустившиеся на землю, что вызвано локальной неоднородностью ионосферы.

Рассмотрим плоскость $(z, k_x/k)$ (см. рис. 4 а, б и в).

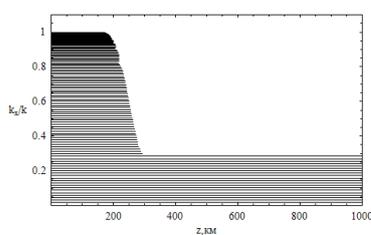


Рис. 4 а.

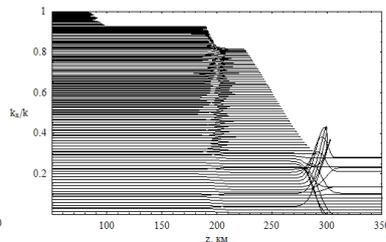


Рис. 4 б.

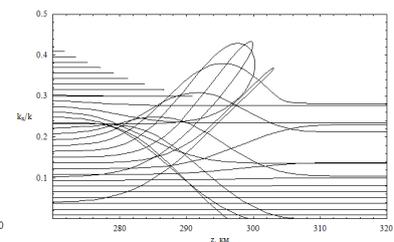


Рис. 4 в.

Лучевая структура в плоскости $(z, k_x/k)$; невозмущенный случай – рис. 4 а; возмущенный случай – рис. 4 б; рис. 4 в – фрагмент рис. 4 б.

На рис. 4 а представлен невозмущенный случай. Нижние линии соответствуют лучам рис. 2 а, проходящим ионосферный слой, а выше видим лучи, отразившиеся от ионосферы. В возмущенном случае (рис. 4 б, в) возникают вертикальные полосы, ограниченные каустическими линиями (рис. 4 б). Проявление локальной неоднородности в этом подпространстве (на этой карте) иллюстрирует рис. 4 в. Видно, что один из лучей делает петлю, охватывающую локальную неоднородность.

Перейдем теперь к чисто импульсному подпространству фазового пространства и рассмотрим плоскость $(k_x/k, k_z/k)$ (см. рис. 5 а, б и 5 в).

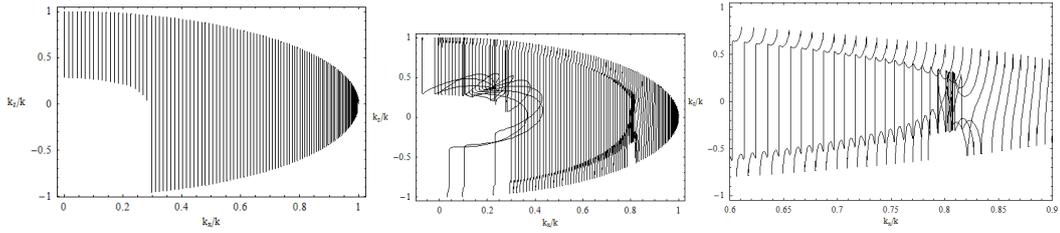


Рис. 5 а.

Рис. 5 б.

Рис. 5 в.

Лучевая структура в плоскости $(k_x/k, k_z/k)$; невозмущенный случай – рис. 5 а; возмущенный случай – рис. 5 б; рис. 5 в – фрагмент рис. 5 б.

В невозмущенном случае (рис. 5 а) лучами являются прямые линии, поскольку для каждого угла выхода луча η проекция волнового вектора k_x является константой. Лучи, отражающиеся от ионосферы, идут сверху вниз и локализованы в правой части рисунка. Проходящие лучи расположены слева, они также идут сначала вниз, затем «отражаются» от уровня, соответствующего минимальной диэлектрической проницаемости среды, и затем возвращаются обратно. При этом возникает каустика.

В возмущенном случае (рис. 5 б и в) обращает на себя внимание локальная неоднородность в виде некоторой области слева, откуда во все стороны расходятся лучи (рис. 5 б), образующие каустику. Во вторых в правой области имеется сложная лучевая, а следовательно и каустическая структура, фрагмент которой показан на рис. 5 в.

Наличие каустик и их особенностей приводит к сингулярностям лучевых решений или подынтегральных выражений (для предканонического оператора Маслова). На рис. 6 а и 6 б показано ослабление электромагнитного поля вдоль лучей за счет расходимости лучевого потока. Начальное значение якобиана расходимости вычисляется на расстоянии 1 м от изотропного передатчика.

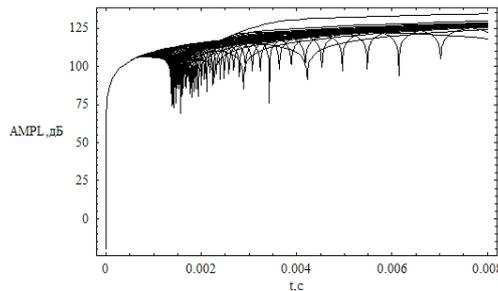


Рис. 6 а.

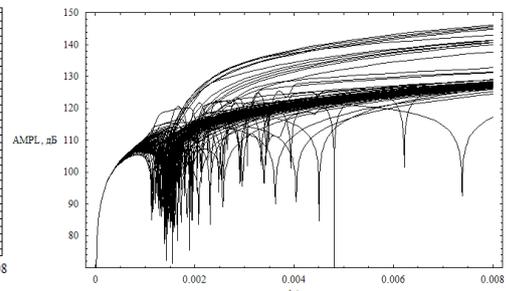


Рис. 6 б.

Зависимость расходимости сигнала от времени; невозмущенный случай – рис. 6 а; возмущенный случай – рис. 6 б.

Из рис. 6 а видно, что вдоль луча интенсивность излучения сначала резко падает, а потом выходит на относительно стабильный уровень. В возмущенном случае (рис. 6 б) общая структура остается той же, но самыми слабыми сигналами являются не только сигналы, передаваемые «лучами Педерсена», но и рассеянные локальной неоднородностью.

На рис. 7 а приведен график амплитудного коэффициента в зависимости от группового времени в невозмущенном случае.

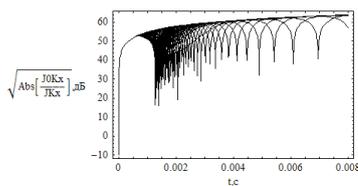


Рис. 7 а.

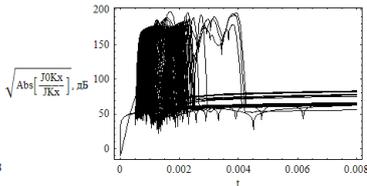


Рис. 7 б.

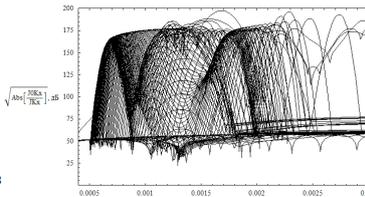


Рис. 7 в.

Амплитудный коэффициент $\sqrt{|J_{k_x 0} / J_{k_x}|}$; невозмущенный случай – рис. 7 а;
возмущенный случай – рис. 7 б; рис. 7 в – фрагмент рис. 7 б.

Хотя абсолютные значения по вертикальной оси в два раза меньше чем на рис. 6 а, структуры в целом похожи. Также имеют место провалы, обозначающие положение каустики или её особенности. На рис. 7 б и в представлен возмущенный случай. Следует отметить, что хотя со временем все лучи выходят по этому коэффициенту на уровень 60-70дБ (рис. 7 а), при прохождении возмущенной области они имеют значительные (до 200 дБ) колебания по ослаблению. Дольше всех на этом уровне сохраняются лучи в волновом канале (рис. 7 б и в), однако после выхода из него коэффициент падает. Провалы в виде «бахромы» показывают положения каустик.

На рис. 8 а, б и в приведены в децибеллах графики зависимости амплитудного коэффициента, пропорционального квадрату подынтегрального выражения для предканонического оператора, для карты (x, k_z) вдоль лучей в зависимости от группового времени в невозмущенном и возмущенном случае.

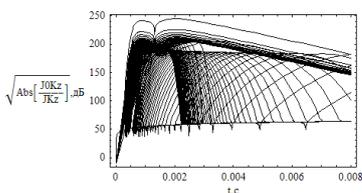


Рис. 8 а.

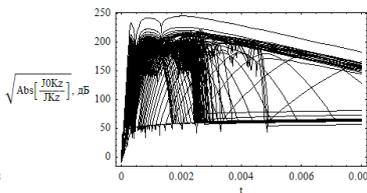


Рис. 8 б.

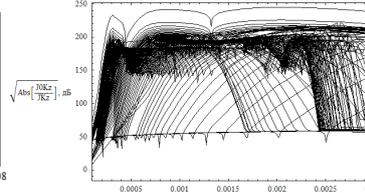


Рис. 8 в.

Амплитудный коэффициент $\sqrt{|J_{k_z 0} / J_{k_z}|}$; невозмущенный случай – рис. 8 а;
возмущенный случай – рис. 8 б; рис. 8 в – фрагмент рис. 8 б.

Из рис. 8 а, б и в следует, что амплитудный коэффициент увеличивается с ростом угла выхода луча η . Самые верхние лучи соответствуют рассеянию на локальной неоднородности, а наиболее темная часть в правой части рисунков лучам, образующим каустическое остриё слоя F. Как и в предыдущем слое свисающая вниз «бахрома» обозначает положение каустик.

На рис. 9 а и 9 б последовательно представлены невозмущенный и возмущенный случаи. Анализируя рис. 9 а, видим, что с увеличением угла выхода луча угол первоначального наклона траектории на рисунке растет, коэффициент вдоль траектории первоначально растет, а затем резко падает, и, наконец, крайний левый нисходящий луч соответствует каустическому острию. «Бахрома» отсутствует, зато коэффициент вдоль каждого луча стремится к $-\infty$. Роль возмущений хорошо видна на рис. 9 б. Появляется «бахрома», так как возникают дополнительные каустики. Несколько круто спадающих траекторий справа соответствуют лучам из волнового канала. Верхние косые траектории связаны с рассеяние на локальной неоднородности.

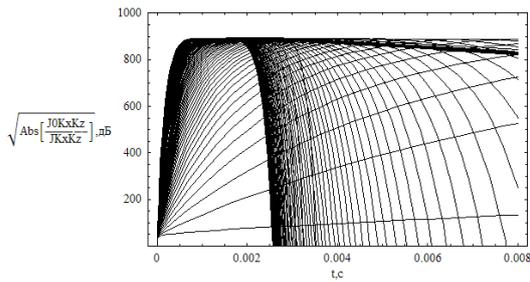


Рис. 9 а.

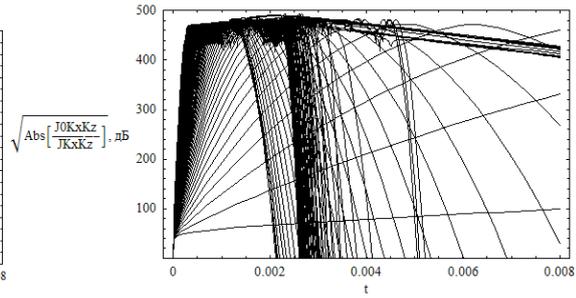


Рис. 9 б.

Амплитудный коэффициент $\sqrt{\left| \frac{J_{k_x, k_z, 0}}{J_{k_x, k_z}} \right|}$; невозмущенный случай – рис. 9 а;
возмущенный случай – рис. 9 б.

Таким образом, в работе сопоставлены проекции 6-мерного фазового пространства в двумерные подпространства, соответствующие различным картам канонического оператора Маслова, в невозмущенном и возмущенном случаях. Рассмотрены каустики лучевых семейств и их особенности, возникающие в этих проекциях. Рассчитаны амплитудные множители вдоль лучей для разных карт и проанализированы сингулярности, связанные с касанием лучей каустик. В качестве возмущений ионосферного слоя F рассмотрены три дополнительные структуры: слой E, спорадический слой и локальное эллиптическое возмущение в окрестности максимума главного ионосферного слоя F.

Отметим, что переход от классического представления решения в лучевой форме в конфигурационном пространстве к интегральному представлению (в частности, в виде канонического оператора Маслова) осуществляется ради построения равномерно асимптотического решения и наличие каустик на канонических картах вблизи каустик конфигурационного пространства нежелательно. Однако, рассмотренные подпространства даже в невозмущенном случае содержат каустики, а в ведение таких не очень сложных возмущений делает лучевую и каустическую картину весьма запутанной. Предпочтительнее всего в этом смысле выглядит переход в импульсное подпространство по двум переменным. К сожалению, при этом увеличивается кратность интеграла. Поэтому остается актуальной проблема тщательного анализа лучевых и каустических структур в конкретных задачах и перехода от интегрального описания к волновой теории катастроф [11-19, 25-26].

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 15-02-04206-а).

Литература

1. Ипатов Е.Б., Лукин Д.С., Палкин Е.А. Численная реализация метода канонического оператора Маслова в задачах распространения коротких радиоволн в ионосфере Земли.// Изв. вузов. Радиофизика. 1990. Т.33. № 5. С. 562-573.
2. Ipatov E.B., Lukin D.S., Palkin E.A. Maslov canonical operator in problems of diffraction and propagation of waves in inhomogeneous media.//Sov. J. Numer. Anal. & Math. Modelling., 1990. V.5. № 6. P.465–488.
3. Ipatov E.B., Lukin D.S., Palkin E.A., Shkolnikov V.A. Maslov canonical operator in problems of diffraction and EM waves propagation in inhomogeneous media.//Papers of technical meeting on electromagnetic theory./OFSET-90. The Institute of Electrical Engineers of Japan. 1990. P. 39–48.

4. Ипатов Е.Б., Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А., Растягаев Д.В. Методы моделирования распространения электромагнитных волн в ионосфере с учетом распределений электронной концентрации и магнитного поля Земли // Радиотехника и электроника. 2014. Т. 59. № 12. С. 1180-1187.
5. Казанцев А.Н., Лукин Д.С., Спиридонов Ю.Г. Метод исследования распространения радиоволн в неоднородной магнитоактивной ионосфере. // Космические исследования, 1967. Т. 5. Вып. 4. С. 593–600.
6. Лукин Д.С., Спиридонов Ю.Г. Применение метода характеристик для численного решения задач распространения радиоволн в неоднородной и нелинейной среде. // Радиотехника и электроника, 1969. Т. 14. № 9. С. 1673–1677.
7. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Кирьянова К.С. Метод расширенной бихарактеристической системы при моделировании распространения радиоволн в ионосферной плазме. // Радиотехника и электроника, М.: Наука. 2012. Т.57. №9. С. 1028-1034.
8. Маслов В.П. Теория возмущений и асимптотические методы. М.: МГУ, 1965. 553 с.
9. Маслов В.П., Федорюк М.В. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. М.: Наука. 1976. 296 с.
10. Мищенко А.С., Стернин Б.Ю., Шаталов В.Е. Лагранжевы многообразия и метод канонического оператора. М.:Наука,1976. 352 с.
11. Лукин Д.С., Палкин Е.А. Численный канонический метод в задачах дифракции и распространения электромагнитных волн в неоднородных средах. М.: МФТИ, 1982. 159 с.
12. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А. Равномерные асимптотики интегралов от быстроосциллирующих функций с вырожденными седловыми точками: Препринт /ИРЭ АН СССР. М., 1984. № 41 (413). 75 с.
13. Крюковский А.С. Необходимые и достаточные условия образования основных волновых катастроф с корангом, равным двум. //Распространение и дифракция электромагнитных волн. /М.: МФТИ, 1993. С. 4 – 19.
14. Крюковский А.С., Растягаев Д.В. О необходимых и достаточных условиях образования каспидных катастроф. // Распространение и дифракция волн в неоднородных средах. Сб./ М.:МФТИ 1989. С.56-60.
15. Крюковский А.С., Растягаев Д.В. Исследование устойчивых фокусировок, возникающих при нарушении симметрии волнового фронта. // Дифракция и распространение электромагнитных волн. Сб./ М.:МФТИ, 1993. С.20-37.
16. Крюковский А.С. Равномерная асимптотическая теория краевых и угловых волновых катастроф. Монография. М.: РосНОУ, 2013.–368 с.
17. Kryukovsky A.S., Rogachev S.V., Lukin D.S. Special Software for Computing the Special Functions of Wave Catastrophes. // Revista de Matematica: Teoria y Aplicaciones / San Pedro Montes de Oca, San Jose, Costa Rica: Universidad de Costa Rica, 2015. P. 21-30.
18. Крюковский А.С., Лукин Д.С. Локальная асимптотика быстроосциллирующих интегралов, описывающих волновое поле в областях фокусировки // Дифракция и распространение электромагнитных волн: Междувед. сб. / МФТИ. М., 1984. С. 39 - 53.
19. Дорохина Т.В., Ипатов Е.Б., Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А., Растягаев Д.В. Математическое компьютерное моделирование волновых полей типа катастроф. //Распространение радиоволн: сборник докладов XXI Всероссийской научной конференции. Йошкар-Ола, 25-27 мая 2005 г. /Йошкар-Ола: МарГТУ, 2005. Т.2. С. 336-339.
20. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Растягаев Д.В. Математическое моделирование распространения радиоволн в анизотропной неоднородной ионосфере. //Вестник

- Российского нового университета. Серия «Управление, вычислительная техника и информатика» / М.: РосНОУ, 2009. Выпуск 2. С. 7-14.
21. Крюковский А. С., Лукин Д. С., Растягаев Д. В., Скворцова Ю. И. Математическое моделирование распространения частотно-модулированных радиоволн в ионосферной плазме // Радиотехника и электроника, 2015, Т. 60, № 10. С. 1001-1009.
22. Крюковский А.С., Растягаев Д.В., Скворцова Ю.И. Исследование распространения частотно-модулированных пространственно-временных сигналов в неоднородной анизотропной ионосфере // Вестник Российского нового университета. Серия «Управление, вычислительная техника и информатика» / М.: РосНОУ, 2013. Выпуск 4. – С. 47–52.
23. Крюковский А.С., Растягаев Д.В., Скворцова Ю.И. Распространение частотно-модулированных пространственно-временных радиоволн в анизотропной ионосфере. // Труды XXIV Всероссийской научной конференции «Распространение радиоволн», (29 июня–5 июля 2014; Иркутск) / Иркутск: ИСЗФ СО РАН, 2014. Т.4. С. 126–129.
24. Крюковский А.С., Скворцова Ю.И. Применение теории катастроф для описания пространственно-временной структуры частотно-модулированного сигнала в плазме // Электромагнитные волны и электронные системы. 2013. Т. 18. № 8. С. 18-23.
25. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е.А. Сопоставление интегральных асимптотических методов // Труды X школы-семинара по дифракции и распространению волн. 7-15.02.1993./М.: МФТИ. 1993. С.3–35.
26. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Палкин Е. А. Численное сравнение двух асимптотических методов решения задач дифракции волн в плавнонеоднородных средах // Изв. МВ и ССО СССР (Радиофизика). 1986. Т. 29. № 1. С. 79 - 88.